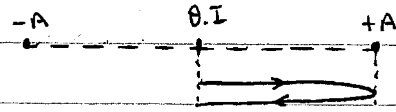
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1º – ΘΕΜΑ 3º

1.1

$\Delta t = 0{,}5\,s$

$S = 0{,}8\,m$

$t_0 = 0,\ x = +A$



$\Delta t = 0{,}5\,s \Rightarrow \frac{T}{2} = 0{,}5\,s \Rightarrow T = 1\,s$

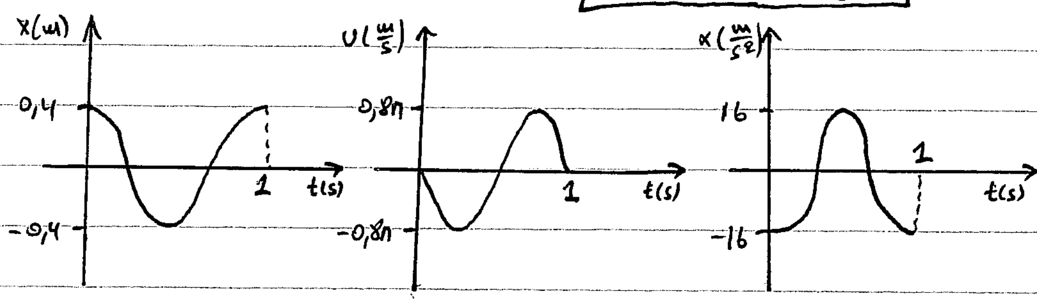
$S = 0{,}8\,m \Rightarrow 2A = 0{,}8\,m \Rightarrow A = 0{,}4\,m$

$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \xrightarrow[x=A]{t_0=0} A = A\eta\mu\phi_0 \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$ ή $\phi_0 = \frac{\pi}{2}\,rad.$

A. $x = A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi\ rad/s} \boxed{x = 0{,}4\eta\mu(2\pi t + \frac{\pi}{2})}$ (S.I.)

$\upsilon = \upsilon_{max}\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \xrightarrow{\upsilon_{max} = \omega A = 0{,}8\pi \frac{m}{s}} \boxed{\upsilon = 0{,}8\pi\,\sigma\upsilon\nu(2\pi t + \frac{\pi}{2})}$ (S.I.)

$\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t + \phi_0) \xrightarrow{\alpha_{max} = \omega^2 A = 16\,m/s^2} \boxed{\alpha = -16\eta\mu(2\pi t + \frac{\pi}{2})}$ (S.I.)



B. $x = 0{,}4\eta\mu(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{t_1} x_1 = 0{,}4\eta\mu\pi \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$

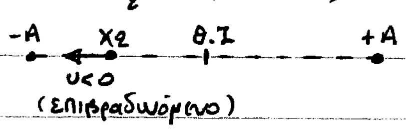
$\upsilon = 0{,}8\pi\,\sigma\upsilon\nu(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{t_1} \upsilon_1 = 0{,}8\pi\,\sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = -0{,}8\pi\ m/s}$

$\alpha = -16\eta\mu(2\pi t + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{t_1} \alpha_1 = -16\eta\mu\pi \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0}$

Γ. $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow m\omega^2A^2 = m\upsilon^2 + m\omega^2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \xrightarrow{x_2} \upsilon_2 = \pm 2\pi\sqrt{0{,}16 - 0{,}04}\ m/s \Rightarrow \upsilon_2 = \pm 2\pi\sqrt{12\cdot 10^{-2}}\ \frac{m}{s}$

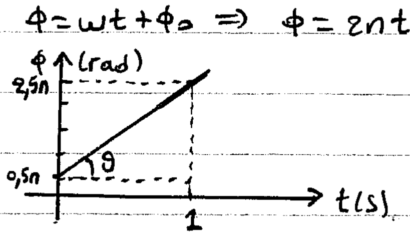
$\Rightarrow \upsilon_2 = \pm 0{,}4\pi\sqrt{3}\ m/s$



$\Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = -0{,}4\pi\sqrt{3}\ m/s}$

$\left.\begin{array}{l} x = A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \\ \alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = -\omega^2 x \xrightarrow{x_2} \alpha_2 = -4\pi^2\cdot(-0{,}2)\,\frac{m}{s^2} \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 8\,m/s^2}$

Δ. $\phi = \omega t + \phi_0 \Rightarrow \phi = 2\pi t + \frac{\pi}{2}$ ① (S.I.)



$① \xrightarrow{t=0} \phi = \frac{\pi}{2}\,rad$

$① \xrightarrow{t=1s} \phi = 2{,}5\pi\,rad$

κλίση: $\varepsilon\phi\theta = \frac{2{,}5\pi - 0{,}5\pi}{1} = 2\pi$ $(=\omega)$.

1.2

$\Delta t = 1s \ (=T)$
$s = 20cm \ (=4A)$
$t_0 = 0$, $\upsilon = 5\pi \ cm/s$
απομακρυνόμενο από Θ.Ι.

A. • $\Delta t = T \Rightarrow \underline{T = 1s}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \underline{\omega = 2\pi \ rad/s}$

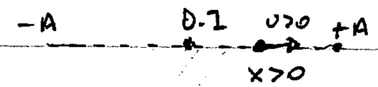
• $S = 4A \Rightarrow \underline{A = 5cm = 0{,}05m}$

• $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \underline{\upsilon_{max} = 0{,}1\pi \ m/s}$

• $\upsilon = \upsilon_{max}\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[\upsilon = 0{,}05\pi \ m/s]{t_0 = 0} 0{,}05\pi = 0{,}1\pi\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi_0 \Rightarrow$

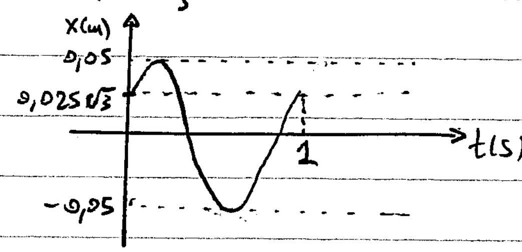
$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\,\varphi_0 = \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\kappa=0} \varphi_0 = \frac{\pi}{3}\ rad, & x>0 \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\kappa=1} \varphi_0 = \frac{5\pi}{3}\ rad, & x<0 \end{cases}$$

Για να έχει θετική ταχύτητα ($\upsilon>0$), απομακρυνόμενο από τη Θ.Ι. θα πρέπει να βρίσκεται δεξιά της Θ.Ι. δηλαδή σε $x>0$.



άρα $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ rad

$$\boxed{x = 0{,}05\,\eta\mu(2\pi t + \tfrac{\pi}{3})} \ (1) \ (S.I.)$$



$(1) \xrightarrow{t=0} x = 0{,}05\,\eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 0{,}025\sqrt{3}\ m$

για $t>0$ το ημίτονο αρχικά αυξάνει, άρα και η x.

B. • $\upsilon = \upsilon_{max}\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[\omega = 2\pi/T]{\upsilon_{max} = \omega A = 0{,}1\pi\ m/s} \upsilon_1 = 0{,}1\pi\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{12} + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_1 = 0{,}1\pi\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 0}$

• $\alpha = -\alpha_{max}\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\alpha_{max} = \omega^2 A = 2\ m/s^2} \alpha_1 = -2\,\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{12} + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = -2\,\eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = -2\ m/s^2}$

Γ. $\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha = -\omega^2 \cdot x \xRightarrow{x_2} \frac{d\upsilon}{dt} = -4\pi^2(-0{,}01)\ m/s^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d\upsilon}{dt} = 0{,}4\ m/s^2}$

Δ. Η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στις ακραίες θέσεις ταλάντωσης ($\pm A$). Το ταλαντούμενο σώμα περνά από τις θέσεις αυτές μια φορά σε κάθε περίοδο, και επομένως η ταχύτητα μηδενίζεται <u>δύο φορές</u> σε κάθε περίοδο.

$$\upsilon = 0{,}1\pi\,\sigma\upsilon\nu(2\pi t + \tfrac{\pi}{3}) \xRightarrow{\upsilon=0} \sigma\upsilon\nu(2\pi t + \tfrac{\pi}{3}) = 0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi t + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=0} \\ 2\pi t + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=1} \end{cases}$$

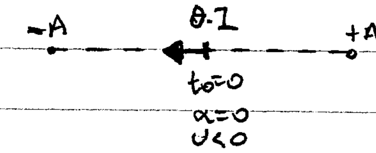
$$\begin{cases} 2\pi t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \\ 2\pi t = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi t = \frac{\pi}{6} \\ 2\pi t = \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{t_1 = \frac{1}{12}\,s} \\ \boxed{t_2 = \frac{7}{12}\,s} \end{cases}$$

1.3 $A = 0{,}2\,m$

$t_0 = 0$, $\alpha = 0$, $\upsilon < 0$

10 διελεύσεις σε $t = 5\pi\,s$

• Το υλικό σημείο τη στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη Θ.Ι. $(x = 0)$ με $\upsilon < 0$



$$x = A\,ημ(\omega t + \phi_0) \xrightarrow[x=0]{t_0=0} 0 = A\,ημ\phi_0 \Rightarrow ημ\phi_0 = 0 = ημ0 \Rightarrow \begin{cases} \phi_0 = 2k\pi + 0 \\ \phi_0 = 2k\pi + \pi - 0 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{k=0} \begin{cases} \phi_0 = 0 \ , \ \upsilon > 0 \\ \phi_0 = \pi\ rad \ , \ \upsilon < 0 \end{cases} \quad \text{Άρα } \phi_0 = \pi\ rad.$$

• 10 διελεύσεις από τη Θ.Ι. αντιστοιχούν σε $N = 5$ ταλαντώσεις

$$f = \frac{N}{t} \Rightarrow f = \frac{5}{5\pi}\,Hz \Rightarrow f = \frac{1}{\pi}\,Hz \ , \ \omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\ rad/s$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \pi\,s$$

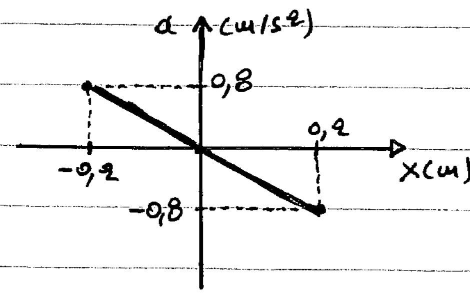
A) $\boxed{x = 0{,}2\,ημ(2t + \pi)}$, (1) (S.I.)

B) $\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \alpha = -4x$ (2) (S.I.)

(2) $\xRightarrow{x=A}$ $\alpha = -0{,}8\,m/s^2$

(2) $\xRightarrow{x=0}$ $\alpha = 0$

(2) $\xRightarrow{x=-A}$ $\alpha = 0{,}8\,m/s^2$

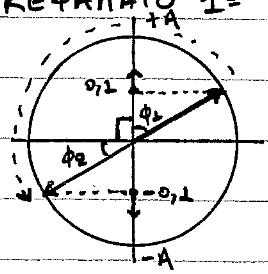


Γ) $$\begin{cases} \upsilon = \omega A\,συν(\omega t + \phi_0) \\ \alpha = -\omega^2 A\,ημ(\omega t + \phi_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \upsilon^2 = \omega^2 A^2 συν^2(\omega t + \phi_0) \\ \alpha^2 = \omega^4 A^2 ημ^2(\omega t + \phi_0) \end{cases} \xrightarrow{ημ^2\theta + συν^2\theta = 1}$$

$$\frac{\alpha^2}{\omega^4 A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \omega^4 A^2 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2}\right) \Rightarrow \alpha^2 = \omega^2(\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \pm 2\sqrt{0{,}16 - \upsilon^2}} \ (S.I.)$$

Δ)



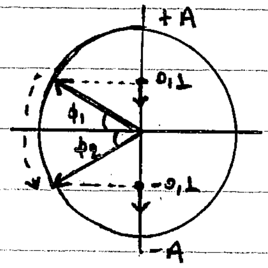
Δ1. $\sigma\upsilon\nu\phi_1 = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$, $\phi_1 = \frac{\pi}{3}$ rad

$\eta\mu\phi_2 = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$, $\phi_2 = \frac{\pi}{6}$ rad

$\Rightarrow \Delta\phi = \phi_1 + \frac{\pi}{2} + \phi_2 \Rightarrow \Delta\phi = \pi$ rad

$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\Delta t_1 = \frac{\pi}{2}\ s}$

Δ2.



$\eta\mu\phi_1 = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$, $\phi_1 = \frac{\pi}{6}$ rad

$\eta\mu\phi_2 = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$, $\phi_2 = \frac{\pi}{6}$ rad

$\Rightarrow \Delta\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{3}$ rad

$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\Delta t_2 = \frac{\pi}{6}\ s}$

1.4 $m = 1\ kg$, $A = 0,5\ m$

Πληροφορίες από γραφική παράσταση $\phi = f(t)$.

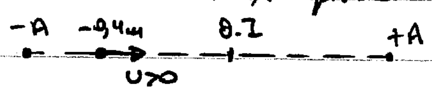
• κλίση: $\varepsilon\phi 45° = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \omega \Rightarrow \underline{\omega = 1\ rad/s}$

• $\phi = \omega t + \phi_0 \xrightarrow[\phi = \frac{13\pi}{6} rad]{t = 2\pi s} \frac{13\pi}{6} = 2\pi + \phi_0 \Rightarrow \underline{\phi_0 = \frac{\pi}{6}\ rad}$

A. $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \boxed{x = 0,5\,\eta\mu\left(t + \frac{\pi}{6}\right)}$, (S.I.)

B. $F = -D \cdot x$, $D = m\omega^2 = 1\ N/m$ $\Rightarrow 0,4 = -x \Rightarrow \underline{x = -0,4\ m}$

Το σώμα κινείται επιταχυνόμενο άρα προς τη Θ.Ι. ($\upsilon > 0$)



• Α.Δ.Ενέργειας Ταλάντωσης: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m\upsilon^2 = m\omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow \boxed{\upsilon = +0,3\ m/s}$

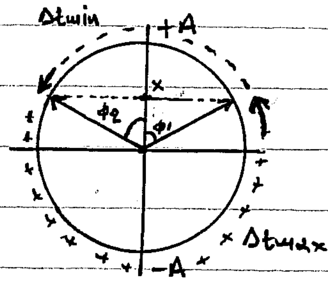
Γ. • $K = \frac{75}{100}E \Rightarrow K = \frac{3}{4}E$

• $E = K + U \Rightarrow E = \frac{3}{4}E + U \Rightarrow U = \frac{E}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2}$

• $\alpha = -\omega^2 \cdot x \Rightarrow |\alpha| = \omega^2|x| \xrightarrow{x = \pm A/2} \boxed{|\alpha| = 0,25\ m/s^2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΘΕΜΑ 3ο

Δ.



- $\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \frac{0,25\sqrt{3}}{0,5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ rad
- $\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = \frac{0,25\sqrt{3}}{0,5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ rad

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\varphi_{min} = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ \Delta\varphi_{max} = 2\pi - (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \end{cases}$$

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\Delta t_{min} = \frac{\pi}{3}\text{ s}} \\ \boxed{\Delta t_{max} = \frac{5\pi}{3}\text{ s}} \end{cases}$$

1.5 $m = 1$ kg
$t_0 = 0$, $x = 0,05$ m, προς Θ.Ι.

Πληροφορίες από γραφική παράσταση $\Sigma F = f(x)$
- $A = 0,1$ m
- $DA = 10$ N $\Rightarrow D = 100$ N/m

$D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10$ rad/s

Τη στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα περνάει από τη $x = 0,05$ m κινούμενο προς τη Θ.Ι. άρα έχει $\upsilon < 0$. −A Θ.Ι x +A $\upsilon < 0$

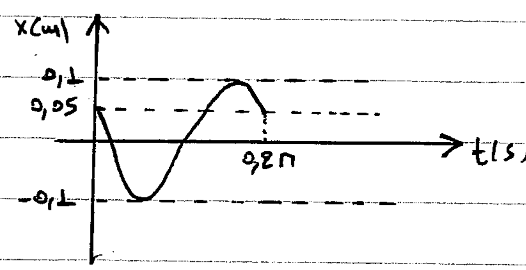
$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[x=0,05m]{t_0=0} 0,05 = 0,1\,\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \underset{k=0}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}, & \upsilon > 0 \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}, & \upsilon < 0 \end{cases} \qquad \text{Άρα } \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad.}$$

Α. $x = 0,1\,\eta\mu\left(10t + \frac{5\pi}{6}\right)$ (1) (S.I.)

(1) $\xrightarrow{t=0}$ $x = 0,05$

Για $t > 0$ το ημίτονο μικραίνει.



Β. $E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow \boxed{E = 0,5\text{ J}}$

Γ. $\Pi\% = \frac{U}{E}\cdot 100\% = \frac{E-K}{E}\cdot 100\% = \left(1 - \frac{K}{E}\right)\cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0,25}{0,5}\right)\cdot 100\%$
$\Rightarrow \boxed{\Pi\% = 75\%}$

Δ. $E = K + U \Rightarrow U = E - K \Rightarrow U = 0,125$ J $\Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 = 0,125$ J $\Rightarrow x = \pm 0,05$ m

$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow |\alpha| = \omega^2|x| \Rightarrow \boxed{|\alpha| = 5\text{ m/s}^2}$.

1.6

$m=0,8kg$
$k=80\ N/m$
$F=20N$ (σταθ.)
$t_0=0$ όταν $υ=0$ και $F=0$

A. $W_F = E \Rightarrow F\cdot x = \frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow[x=A]{υ=0} F\cdot A = \frac{1}{2}k\cdot A^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A=0,5m}$

B. $υ=υ_{max}συν(ωt+φ_0)$ (1)

$ω=\sqrt{\frac{k}{m}}=10\ rad/s$

$υ_{max}=ωA=5\ m/s$

$x=Aημ(ωt+φ_0) \xrightarrow[x=+A]{t_0=0} A=Aημφ_0 \Rightarrow ημφ_0=1=ημ\frac{π}{2} \Rightarrow \begin{cases} φ_0=2kπ+\frac{π}{2} \xrightarrow{k=0} \\ φ_0=2kπ+π-\frac{π}{2} \end{cases}$

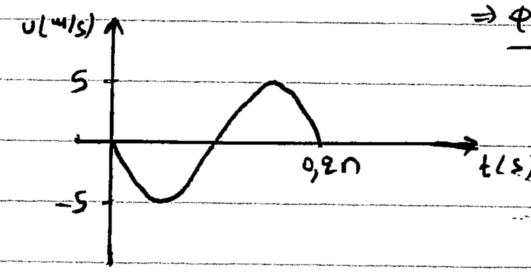
$\Rightarrow \underline{φ_0=\frac{π}{2}\ rad}$

(1) $\Rightarrow υ=5συν(10t+\frac{π}{2})$

(1) $\xrightarrow{t=0} υ=0$

(1) $\xrightarrow{t=\frac{T}{4}} υ=5συν(\frac{2π}{T}\cdot\frac{T}{4}+\frac{π}{2}) \Rightarrow$

$υ=5συνπ \Rightarrow υ=-5\ m/s$



Γ. $K=\frac{1}{2}mυ^2 \Rightarrow K=\frac{1}{2}mυ_{max}^2συν^2(ωt+φ_0) \Rightarrow K=10συν^2(10\cdot\frac{π}{12}+\frac{π}{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow K=10\cdot συν^2(\frac{5π}{6}+\frac{π}{2}) \Rightarrow K=10\cdot συν^2\frac{4π}{3} \Rightarrow K=10\cdot συν^2(π+\frac{π}{3})$

$\Rightarrow K=10\cdot\frac{1}{4}J \Rightarrow \boxed{K=2,5\ J}$

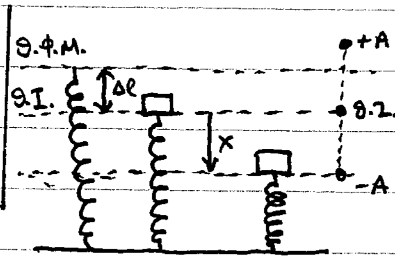
$E=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow E=10J.$

$E=K+U \Rightarrow \boxed{U=7,5J}$

Δ. $\frac{K}{U}=\frac{E-U}{U}=\frac{E}{U}-1=\frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}kx^2}-1=\frac{A^2}{x^2}-1=\frac{0,25}{0,01}-1$ ή $\boxed{\frac{K}{U}=24}$

1.7

$m=1kg$
$k=100\ N/m$
$x=0,15\ m$



A. • $\underline{Θ.Ι.}$: $ΣF=0 \Rightarrow F_{ελ}-W=0 \Rightarrow k\cdot Δl=mg$ (1)

• $\underline{Νέα\ θέση}$: $ΣF=W-F'_{ελ} \Rightarrow ΣF=mg-k(x+Δl)$

$\Rightarrow ΣF=mg-kx-kΔl \xrightarrow{(1)} \underline{ΣF=-k\cdot x}$

Άρα θα εκτελέσει α.α.τ. με $D=k=100\frac{N}{m}$

B. $D=mω^2 \Rightarrow ω=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \underline{ω=10\ rad/s}$

$t_0=0$, $x=-A$ (αφού $υ_0=0$) άρα $\underline{A=x=0,15m}$

$x=Aημ(ωt+φ_0) \xrightarrow[x=-A]{t_0=0} -A=Aημφ_0 \Rightarrow ημφ_0=-1=ημ\frac{3π}{2}$ ή $\underline{φ_0=\frac{3π}{2}\ rad.}$

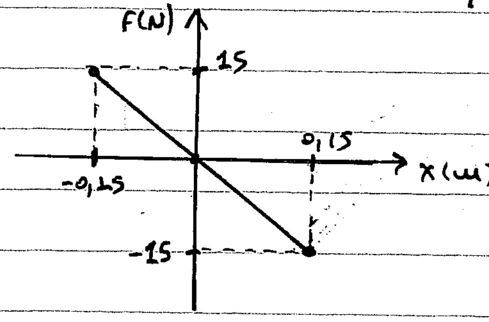
$\boxed{x=0,15ημ(10t+\frac{3π}{2})}$ (S.I.)

Γ. $F=-Dx \Rightarrow \underline{F=-100x}$ (1) (S.I.)

$(1) \xrightarrow{x=A} F=-15N$

$(1) \xrightarrow{x=0} F=0$

$(1) \xrightarrow{x=-A} F=15N$

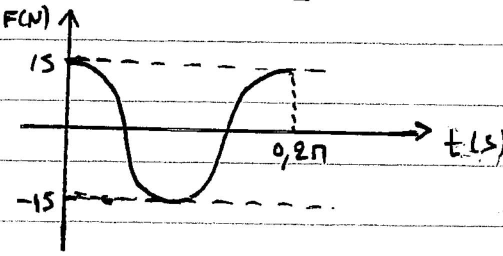


$F=-Dx \Rightarrow F=-kA\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow \underline{F=-15\eta\mu(10t+\frac{3\pi}{2})}$ (2) (S.I.)

$(2) \xrightarrow{t=0} F=15N$

$(2) \xrightarrow{t=T/4} F=-15\eta\mu(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}+\frac{3\pi}{2}) \Rightarrow$

$F=-15\eta\mu 2\pi \Rightarrow F=0$



Δ. Θ.Ι.: $\Sigma F=0 \Rightarrow F_{ελ}-mg=0 \Rightarrow k\Delta\ell=mg \Rightarrow \Delta\ell=0,10m$

- $x=+A$: $|F_{επ}|=kA=\underline{15N}$

  $|F_{ελ}|=k\cdot(A-\Delta\ell)=\underline{5N}$

- $x=-A$: $|F_{επ}|=kA=\underline{15N}$

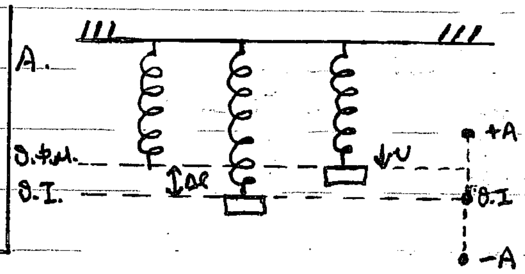
  $|F_{ελ}|=k(A+\Delta\ell)=\underline{25N}$

1.8 $k=100\,N/m$

$m=1\,kg$

$t_0=0$, Θ.Φ.Μ, $|u|=\sqrt{3}\,m/s$ προς τα κάτω.

A.



- $\underline{Θ.Ι.}$: $\Sigma F=0 \Rightarrow F_{ελ}-w=0 \Rightarrow k\cdot\Delta\ell=mg \Rightarrow \Delta\ell=0,1m$
- $\underline{ΑΔΕΤ}$: $E=K+U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \Rightarrow A^2=\frac{m}{k}u^2+\Delta\ell^2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow A=\pm 0,2m \Rightarrow \underline{A=0,2m}$
- $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\underline{10\,rad/s}$
- $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow[x=\Delta\ell]{t_0=0} 0,1=0,2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=\frac{1}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases}\varphi_0=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ \varphi_0=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow$

$\xrightarrow{k=0} \begin{cases}\varphi_0=\frac{\pi}{6}, & u>0\\ \varphi_0=\frac{5\pi}{6}, & u<0\end{cases}$ Άρα $\underline{\varphi_0=\frac{5\pi}{6}\,rad}$

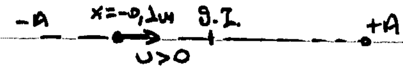
$$\boxed{x=0,2\eta\mu(10t+\frac{5\pi}{6})} \quad (S.I.)$$

B. $\left.\begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -k\cdot x \\ \alpha = -\omega^2\cdot x \Rightarrow x = -0,1m \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt} = 10\ kg\,m/s^2}$

$\frac{dK}{dt} = \Sigma F\cdot \upsilon$ (1)

$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon = \pm 10\sqrt{0,04 - 0,01}\ m/s \Rightarrow \upsilon = \sqrt{3}\ m/s$



(1) $\Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = 10\sqrt{3}\ J/s}$

Γ. $x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{6}) \xrightarrow{t_0=0} x = 0,2\eta\mu(\pi - \frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = 0,2\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \underline{x = 0,1m\ (=\Delta\ell)}$

$x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{6}) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{15}s} x = 0,2\eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \underline{x = -0,2m\ (=-A)}$

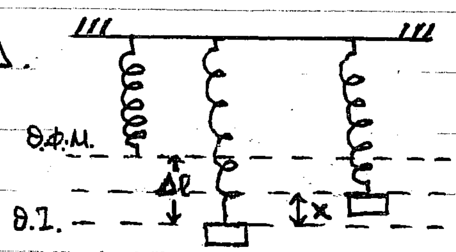
• <u>Δύναμη Επαναφοράς:</u> ΘΜΚΕ: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_{\Sigma F} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \xrightarrow[\upsilon_1=0,\ x_1=-A]{\upsilon_0=\sqrt{3}m/s}$

$\Rightarrow W_{\Sigma F} = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \Rightarrow \boxed{W_{F\varepsilon\pi} = -1,5J}$

• <u>Δύναμη Ελατηρίου:</u> $W_{F\varepsilon\lambda} = U^{\varepsilon\lambda}_{\alpha\rho\chi} - U^{\varepsilon\lambda}_{\tau\varepsilon\lambda} = 0 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell + A)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{W_{F\varepsilon\lambda} = -4,5J}$

Δ.



$|F_{\varepsilon\lambda}| = |F_{\varepsilon\pi}| \Rightarrow k(\Delta\ell - x) = k\cdot x \Rightarrow k\cdot\Delta\ell = 2kx$

$\Rightarrow x = \frac{\Delta\ell}{2} \Rightarrow \boxed{x = 0,05m}$

1.9. | $m = 1\ kg$
 $t_0 = 0,\ \alpha = -5m/s^2$ |

A. Πληροφορίες από γραφική παράσταση

• $A = 5cm = \underline{0,05m}$

• $E = 0,125J \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = 0,125J \Rightarrow \underline{K = 100N/m}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \underline{\omega = 10\ rad/s}$

$\alpha = -\omega^2\cdot x \xrightarrow{\alpha=-5m/s^2} -5 = -10^2\cdot x \Rightarrow \underline{x = 0,05m\ (=+A)}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΘΕΜΑ 3ο

$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow[x=+A]{t_0=0} A=A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=1=\eta\mu\frac{\pi}{2}$ ή $\underline{\varphi_0=\frac{\pi}{2}\ rad}$

$\boxed{x=0{,}05\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})}$ (S.I.)

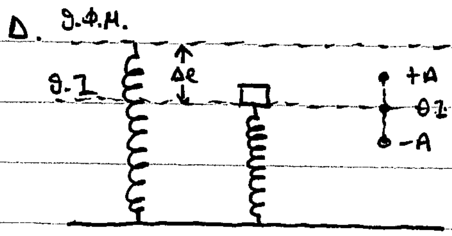
B. • $E=K+U \xrightarrow{K=3U} E=4U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=4\cdot\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x=\pm\frac{A}{2} \Rightarrow \boxed{x=\pm 2{,}5c}$

• $\frac{K}{E}=\frac{E-U}{E}=1-\frac{U}{E}=1-\frac{\frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}kA^2}=1-\frac{x^2}{A^2}$ ή $\boxed{\frac{K}{E}=\frac{3}{4}}$

Γ. $\left.\begin{array}{l}\frac{d\upsilon}{dt}=5m/s^2 \Rightarrow \alpha=5m/s^2\\ \alpha=-\omega^2\cdot x\end{array}\right\} \Rightarrow x=-0{,}05m$

$\Pi\%=\frac{U}{E}\cdot 100\%=\frac{\frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}kA^2}100\%=\frac{x^2}{A^2}100\%$ ή $\boxed{\Pi\%=100\%}$

Δ.



$\underline{\theta.I.}$: $\Sigma F=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}-w=0 \Rightarrow k\Delta\ell=mg$
$\Rightarrow \Delta\ell=0{,}1m$

• $x=-A$: $|F_{\varepsilon\lambda(max)}|=k(\Delta\ell+A)=\underline{15N}$

• $x=+A$: $|F_{\varepsilon\lambda(min)}|=k\cdot(\Delta\ell-A)=\underline{5N}$

1.10.

$m=1kg$
$k=100\ N/m$
$F=20N$ (σταθ.)
$t_0=0$, $x=0{,}1m$, $F=0$

A. $W_F=E \Rightarrow W_F=K+U \Rightarrow F\cdot x=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$
$\overset{S.I.}{\Rightarrow} 20\cdot 0{,}1=\frac{1}{2}1\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}100\cdot 0{,}01 \Rightarrow$
$\Rightarrow \upsilon=\sqrt{3}\ m/s$

• $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \boxed{K=1{,}5J}$

• $E=W_F \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=F\cdot x \Rightarrow \boxed{A=0{,}2m}$

B. • $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=10\ rad/s$

• $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow[x=0{,}1m]{t_0=0} 0{,}1=0{,}2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=\frac{1}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\varphi_0=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \varphi_0=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{array}\right. \Rightarrow$

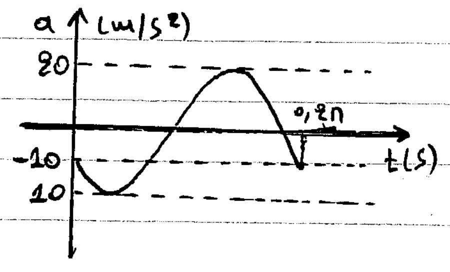
$\xrightarrow{\kappa=0} \left\{\begin{array}{l}\varphi_0=\frac{\pi}{6},\ \upsilon>0\\ \varphi_0=\frac{5\pi}{6},\ \upsilon<0\end{array}\right.$ Άρα $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$ rad

$\alpha=-\alpha_{max}\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow{\alpha_{max}=\omega^2A}$

$\boxed{\alpha=-20\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})}$ (1) (S.I.)

(1) $\xrightarrow{t=0} \alpha=-10m/s^2$

Για $t>0$ το ημίτονο αυξάνει ενώ η επιτάχυνση μειώνεται

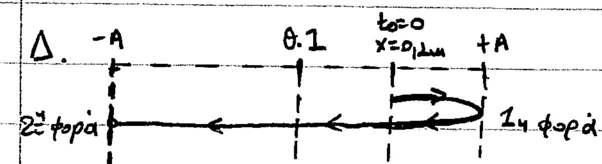


Γ. $U=\frac{25}{100}E \Rightarrow U=\frac{E}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow x=\pm\frac{A}{2}$

$x=A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \xrightarrow{x=\frac{A}{2}} \frac{A}{2}=A\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10t+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ 10t+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{k=0} \begin{cases} t_0=0 \\ \boxed{t_1=\frac{\pi}{15}\ s} \end{cases}$$

Δ.



• $x=A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \xrightarrow{x=-A} -A=A\eta\mu(\omega t+\phi_0)$

$\Rightarrow \eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})=-1=\eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10t+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t_2=\frac{2\pi}{15}\ s}$

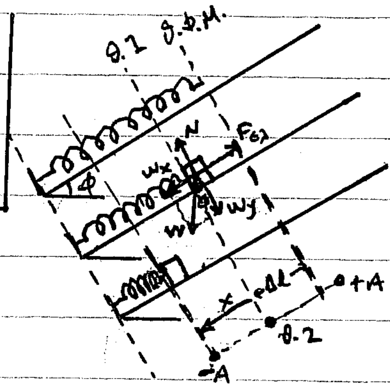
• $S=(A-x)+2A$

$S=\frac{A}{2}+2A$

$\boxed{S=0,5m}$

1.11

$k=200\ N/m$
$\phi=30^\circ$
$w=40N$



$w_x=w\eta\mu\phi$

$w_y=w\sigma\upsilon\nu\phi$

A. • Θ.Ι.: $\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{ελ}-w_x=0 \Rightarrow k\cdot\Delta\ell=w\cdot\eta\mu\phi \Rightarrow \boxed{\Delta\ell=0,1m}$

• $W_F=E \Rightarrow W_F=\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{W_F=4J}$

B. • Θ.Ι.: $\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{ελ}-w_x=0 \Rightarrow k\cdot\Delta\ell=w_x$ (1)

• Νέα θέση: $\Sigma F_x=w_x-F_{ελ} \Rightarrow \Sigma F_x=w_x-k(\Delta\ell+x) \overset{(1)}{\Rightarrow} \Sigma F_x=-k\cdot x$

Άρα το σώμα θα εκτελέσει α.α.τ. με $D=k=200\ N/m$

▪ Το πλάτος ταλάντωσης είναι $A=x=0,2m$ αφού $U_0=0$.

▪ $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=5\sqrt{2}\ rad/s$

▪ $x=A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \xrightarrow[x=-A]{t_0=0} -A=A\eta\mu\phi_0 \Rightarrow \eta\mu\phi_0=-1=\eta\mu\frac{3\pi}{2}$ ή $\phi_0=\frac{3\pi}{2}\ rad$

Άρα $\boxed{x=0,2\eta\mu(5\sqrt{2}t+\frac{3\pi}{2})}$ (S.I.)

Γ. • Θ.Φ.Μ. : $|F_{ελ(min)}| = 0$

• $x = -A$: $|F_{ελ(max)}| = k(\Delta\ell + A) = 60N$

Δ. • Το σώμα m θα αποχωρίσει από το ελατήριο τη στιγμή που η δύναμη που αυτό του ασκεί μηδενιστεί. Προφανώς αυτό θα συμβεί όταν περνά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, δηλαδή στη θέση με απομάκρυνση $x = A - \Delta\ell = 0{,}1m$

Απόδειξη: για την α.α.τ. του m ισχύει,

$\Sigma F = -D_m \cdot x \xrightarrow{D_m = k} F_{ελ} - Wx = -kx \Rightarrow F_{ελ} = Wx - kx \Rightarrow$

$\xrightarrow{F_{ελ}=0} kx = Wx \Rightarrow x = \frac{Wx}{k} \Rightarrow x = 0{,}1m$

• Θα βρούμε την ταχύτητα που έχει τότε το σώμα m από Α.Δ.Ε.Τ.

$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}kx^2 \overset{S.I.}{\Rightarrow} 4 = 2 \cdot u^2 + 1 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{3}{2}}\, m/s$

• Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. από τη θέση αυτή μέχρι τη θέση που στιγμιαία σταματάει.

$\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_{wx} = K_{τελ} - K_{αρχ} \xrightarrow{K_{τελ}=0} -W_x \cdot S = -\frac{1}{2}mu^2$

$\Rightarrow \boxed{S = 0{,}15m}$

1.12. | $m = 2kg$, $t_0 = 0$, $x = 0{,}1\sqrt{3}\, m$, $u < 0$ |

Α. Πληροφορίες από γραφική παράσταση $K = f(x)$

• $A = 20cm = 0{,}2m$

• $E = 4J$

$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{k = 200\, N/m}$

• $E = K + U \xrightarrow{K = \frac{U}{3} \Rightarrow U = 3K} E = 4 \cdot K \Rightarrow \frac{E}{4} = \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow \boxed{|u| = 1\, m/s}$

Β. • $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 10\, rad/s$

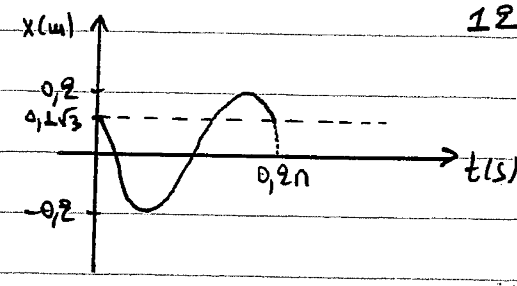
• $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[x = 0{,}1\sqrt{3}m]{t_0=0} 0{,}1\sqrt{3} = 0{,}2\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{k=0} \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{3}\, rad ;\ u > 0 \\ \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}\, rad ,\ u < 0 \end{cases}$ Άρα $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}\, rad$

• $x = 0{,}2\eta\mu\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right)$ ① (S.I.)

$① \xRightarrow{t=0} x = 0{,}1\sqrt{3}\ m$

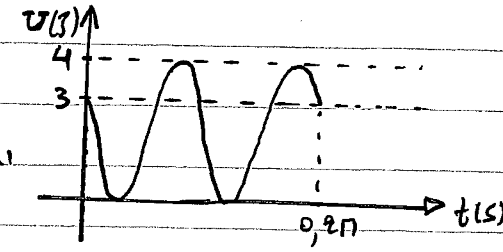
Για $t>0$ το ημίτονο μειώνεται



• $U = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U = 4\,\eta\mu^2\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right)$ ② (S.I.)

$② \xRightarrow{t=0} U = 3J$

Για $t>0$ το τετράγωνο του ημιτόνου μειώνεται



Γ. • $F_{ελ} = -Dx \Rightarrow F_{ελ} = -k\cdot x \Rightarrow x = -0{,}1m$

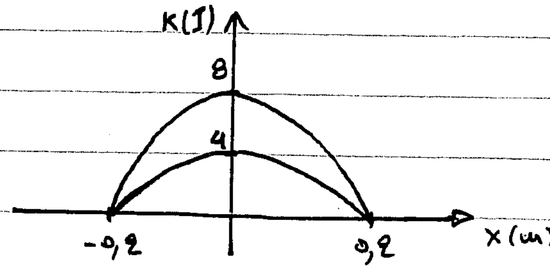
• $U = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{U = 1J}$

• $E = K + U \Rightarrow K = E - U \xRightarrow{E=\frac{1}{2}kA^2=4J} \boxed{K = 3J}$

Δ. $k' = 2k = 400\ N/m$

$A = σταθ.$

$E' = \frac{1}{2}k'A^2 = 8J$

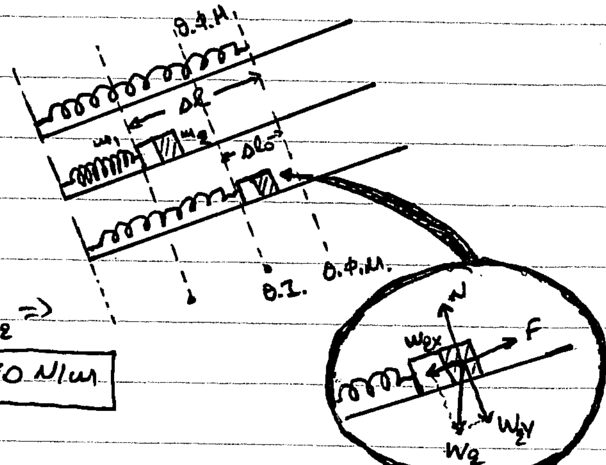


1.13. $m_1 = 1kg$, $\phi = 30^\circ$, $k = 100\ N/m$, $d_1 = 0{,}1m$

A. Δες άσκηση 1.11, ερώτημα Β.

B. $\left|\frac{dp}{dt}\right|_{max} = \Sigma F_{max} = DA \xRightarrow[A=d_1=0{,}1m]{D=k} \boxed{\left|\frac{dp}{dt}\right|_{max} = 10\ kg\,m/s^2}$

Γ. $\Delta\ell = 0{,}3m$, $m_2 = 1kg$



$$\left.\begin{array}{l} D_{m_2} = m_2\cdot\omega^2 \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{m_2} = m_2\cdot\frac{k}{m_1+m_2} \Rightarrow \boxed{D_{m_2} = 50\ N/m}$$

Δ. Στο σώμα m_2, στον άξονα κίνησης ασκείται η W_{2x} και η δύναμη επαφής F με το σώμα m_1. Για την α.α.τ. του m_2 ισχύει:

$\Sigma F = -D_{m_2}\cdot x \Rightarrow F - W_{2x} = -D_{m_2}\cdot x \xRightarrow{F=0} x = 0{,}1m$

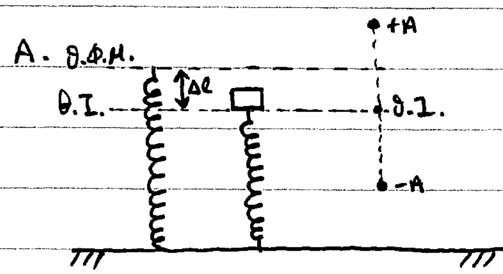
Δηλαδή το m_2 θα χάσει επαφή με το m_1 σε απόσταση 0,1m από τη θέση ισορροπίας του συστήματος

• Μελέτη Θ.Ι.: $\Sigma F=0 \Rightarrow F_{ελ}-w_x=0 \Rightarrow k\cdot\Delta l_0=(m_1+m_2)g\cdot ημφ \Rightarrow \Delta l_0=0{,}1m$

• Αφού $\Delta l_0 = x = 0{,}1m$ το m_2 θα χάσει επαφή με το m_1 τη στιγμή που περνά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, δηλαδή σε απόσταση $\Delta l=0{,}3m$ από τη θέση που αφήσαμε ελεύθερα τα σώματα.

1.14.

$m=2kg$
$t_1=\frac{T}{4}$, $υ>0$
$g=10m/s^2$



Πληροφορίες από γραφική παράσταση

• $2T=0{,}4\pi\, s \Rightarrow T=0{,}2\pi\, s$

$\omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega=10\, rad/s$

$K=m\cdot\omega^2 \Rightarrow K=200N/m$

• $E=9J$

$E=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A=0{,}3m$

Μελέτη Θ.Ι.:

$\Sigma F=0 \Rightarrow F_{ελ}-W=0 \Rightarrow k\cdot\Delta l=mg \Rightarrow \boxed{\Delta l=0{,}1m}$

Β. Από τη γραφική παράσταση $K=f(t)$ βλέπουμε ότι την $t_1=\frac{T}{4}$ η $K=E$ δηλαδή $υ=+υ_{max}$. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει τη στιγμή $t_0=0$ να είναι στη θέση $x=-A$ ώστε τη στιγμή $t_1=\frac{T}{4}$ να περνά από τη Θ.Ι. με $υ=+υ_{max}$.

$x=Aημ(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow[x=-A]{t_0=0} -A=Aημ\varphi_0 \Rightarrow ημ\varphi_0=-1=ημ\frac{3\pi}{2}$ ή $\varphi_0=\frac{3\pi}{2}\,rad$

$\frac{dp}{dt}=\Sigma F=-Dx \Rightarrow \frac{dp}{dt}=-200\cdot 0{,}3\,ημ(10t+\frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt}=-60ημ(10t+\frac{3\pi}{2})}$

Γ. Η θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου είναι η θέση $x=-A$ της ταλάντωσης, άρα:

ΘΜΚΕ: $\Sigma W_F=\Delta K \Rightarrow W_{\Sigma F}=K_{τελ}-K_{αρχ} \Rightarrow W_{F_{ελ}}=0-\frac{1}{2}mυ_{max}^2$
$\xrightarrow{υ_{max}=\omega A} \boxed{W_{F_{ελ}}=-9J}$

Δ) $\bar{P}=\frac{W_{F_{ελ}}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=T/4]{W_{F_{ελ}}=U^{ελ}_{αρχ}-U^{ελ}_{τελ}} \bar{P}=\frac{\frac{1}{2}k\Delta l^2-\frac{1}{2}k(\Delta l+A)^2}{\frac{T}{4}} \Rightarrow \boxed{\bar{P}=-\frac{300}{\pi}W}$

1.15.

$M = 9\ kg$

$k = 160\ N/m$

$m = 1\ kg$

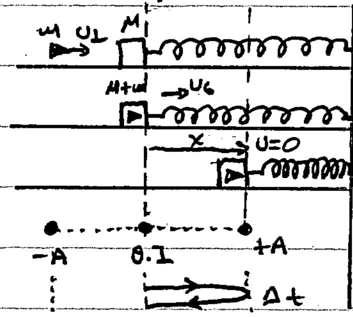
$υ_1 = 10\ m/s$

Α. • Πλαστική κρούση

Α.Δ.Ορμής

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

$mυ_1 = (M+m)υ_Σ \Rightarrow \boxed{υ_Σ = 1\ m/s}$



Β. • Απλή αρμονική ταλάντωση (η κρούση έγινε στη Θ.Ι. η οποία δεν αλλάζει)

$$\left.\begin{array}{l} υ_Σ = υ_{max} \Rightarrow υ_Σ = ω \cdot A \\ ω = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}} \Rightarrow \underline{ω = 4\ rad/s} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A = 0,25\ m}$$

$$x = Aημ(ωt + φ_0) \xrightarrow[x=0]{t_0=0} 0 = Aημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = 0 = ημ0 \Rightarrow \begin{cases} φ_0 = 2κπ \\ φ_0 = 2κπ + π \end{cases} \xRightarrow{κ=0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} φ_0 = 0, & υ > 0 \quad \text{άρα } \underline{φ_0 = 0} \\ φ_0 = π, & υ < 0 \end{cases}$$

Άρα $\boxed{x = 0,25\,ημ4t}$ (S.I.)

Γ.

$$\left.\begin{array}{l} Δt = \dfrac{T}{2} \\ T = \dfrac{2π}{ω} = \dfrac{π}{2}\ s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Δt = \dfrac{π}{4}\ s}$$

Δ. • $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \underline{E = 5\ J}$ (σταθ.)

• $K = \frac{1}{2}(m+M)υ^2 \Rightarrow \underline{K = 5υ^2}$ (1) (S.I.)

(1) $\xRightarrow{υ=υ_{max}} K = 5\ J$

(1) $\xRightarrow{υ=0} K = 0$

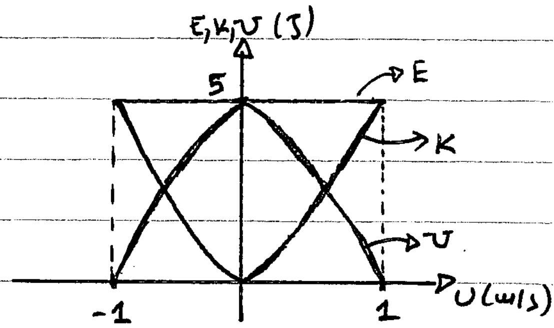
(1) $\xRightarrow{υ=-υ_{max}} K = 5\ J$

• $U = E - K \Rightarrow \underline{U = 5 - 5υ^2}$ (2) (S.I.)

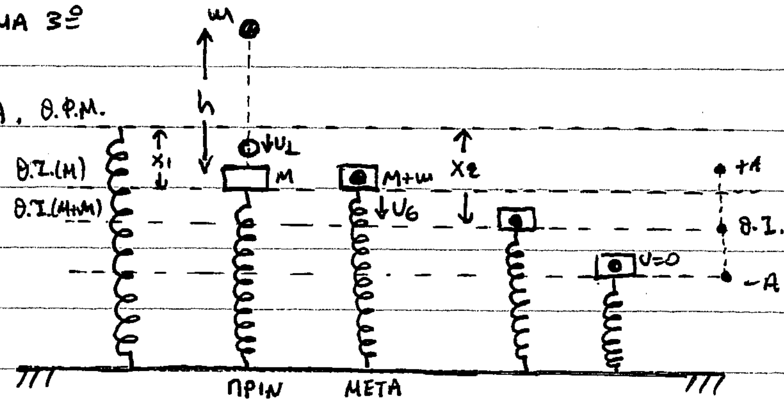
(2) $\xRightarrow{υ=υ_{max}} U = 0$

(2) $\xRightarrow{υ=0} U = 5\ J$

(2) $\xRightarrow{υ=-υ_{max}} U = 0$



1.16.
$M = 7\,kg$
$m = 1\,kg$
$E = 4,5\,J$
$\Delta t = 0,2\sqrt{2}\pi\, s$



- α.α.Τ. (Μ+m)
  - $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 0,4\sqrt{2}\,\pi\, s$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$ $\Rightarrow \underline{k = 100\, N/m}$
  - $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \Rightarrow \boxed{A = 0,3\,m}$

B. • Θ.Ι (Μ) : $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W = 0 \Rightarrow k \cdot x_1 = Mg \Rightarrow \underline{x_1 = 0,7\,m}$

• Θ.Ι (Μ+m) : $\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ} - W_{ολ} = 0 \Rightarrow k \cdot x_2 = (M+m)g \Rightarrow \underline{x_2 = 0,8\,m}$

• ΑΔΕΤ : $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m+M)\upsilon_6^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \Rightarrow$

$\overset{S.I.}{\Rightarrow} 9 = 8\upsilon_6^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_6 = 1\,m/s}$

Γ. ■ αντελαστική (πλαστική) κρούση (Μ-m)

Α.Δ.Ορμής

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

$m\upsilon_1 = (M+m)\cdot \upsilon_6 \Rightarrow \underline{\upsilon_1 = 8\,m/s}$

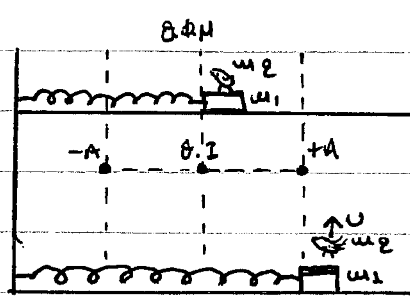
■ κίνηση m (πριν την κρούση)

Ελεύθερη πτώση : $\upsilon = gt \overset{\upsilon=\upsilon_1}{\Longrightarrow} t = 0,8\,s$

$y = \frac{1}{2}gt^2 \overset{y=h}{\Longrightarrow} \boxed{h = 3,2\,m}$

Δ. $\frac{F_{ελ(max)}}{F_{ελ(min)}} = \frac{k\cdot(x_2+A)}{k(x_2-A)} \Rightarrow \boxed{\frac{F_{ελ(max)}}{F_{ελ(min)}} = 2,2}$

1.17
$m_1 = 0,1\,kg$
$\upsilon_{max} = 0,5\,m/s$
$\Delta t = 0,2\pi\, s$
$\omega' = 10\, rad/s$



A. $\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \boxed{T = 0,4\pi\, s}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \underline{\omega = 5\, rad/s}$

$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \boxed{A = 0,1\,m}$

Β. $\cdot\ \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \boxed{k = 10\ N/m}$

• Εφαρμόζουμε Α.Δ. Ορμής στο x άξονα για το πέταγμα του πουλιού

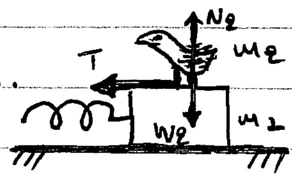
$P^{xx'}_{πριν} = P^{xx'}_{μετά}$

$(m_1+m_2)\cdot 0 = m_1 \cdot u_1 \Rightarrow u_1 = 0$

Αφού το σώμα m_1 μετά την εκτόξευση του πουλιού στη θέση $x = A = 0{,}1m$ έχει μηδενική ταχύτητα, το πλάτος της νέας ταλάντωσης θα είναι $A' = A = 0{,}1m$.

• $u'_{max} = \omega' A' \Rightarrow \boxed{u'_{max} = 1\ m/s}$

Γ. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \boxed{m_2 = 0{,}3\ kg}$

Δ. 

■ Απλή αρμονική ταλάντωση του m_2 (πουλιού)

$\left.\begin{array}{l} \Sigma F = -D_{m_2}\cdot x \\ D_{m_2} = m_2\omega^2 = 7{,}5\ N/m \end{array}\right\} \Rightarrow -T = -7{,}5\cdot x \xRightarrow{x=A} \underline{T_{max} = 0{,}75}$

• $\left.\begin{array}{l} T_{στ(max)} = \mu \cdot N \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = m_2 g \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{T_{στ(max)} = 0{,}9\ N}$

Αφού η μέγιστη δύναμη τριβής που εμφανίζεται στα πόδια του πουλιού είναι $0{,}75N$, μικρότερη της μέγιστης δύναμης στατικής τριβής ($0{,}9N$), άρα δεν υπάρχει κίνδυνος ολίσθησης.

1.18	
$E = 40V$ $C = 2{,}5\ \mu F$ $L = 4\ mH$	Α. ■ Δ1 κλειστός, Δ2 ανοιχτός • Φορτίζεται ο πυκνωτής $C = \frac{Q}{E} \Rightarrow Q = C\cdot E \Rightarrow \boxed{Q = 10^{-4}C}$

■ Δ1 ανοιχτός, Δ2 κλειστός ($t_0 = 0$)

• Ηλεκτρική ταλάντωση στο κύκλωμα LC

$t_0 = 0,\ q = Q = 10^{-4}C,\ i = 0 \ :\ q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ ①

$i = -I\eta\mu\omega t$ ②

• $T = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow \underline{T = 2\pi\cdot 10^{-4}\ s}$

• Ο χρόνος που απαιτείται να εκφορτιστεί ο πυκνωτής είναι $\boxed{\Delta t = \frac{T}{4} = 0{,}5\pi\cdot 10^{-4}s}$

• $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \underline{\omega = 10^4 \ rad/s}$

• $I = \omega Q \Rightarrow \underline{I = 1A}$

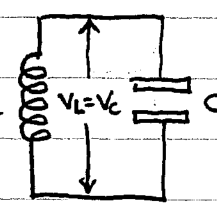
① $\Rightarrow \boxed{q = 10^{-4}\,\text{συν}\,10^4 t}$ (S.I.)

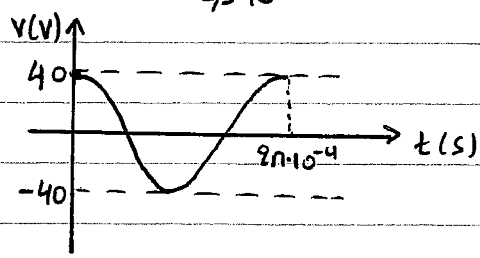
② $\Rightarrow \boxed{i = -\text{ημ}\,10^4 t}$ (S.I.)

B. $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow U_E = \frac{1}{2}\frac{10^{-8}}{2{,}5\cdot 10^{-6}}\cdot \text{συν}^2\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{8}\ J \Rightarrow \boxed{U_E = 10^{-3} J}$

$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow U_B = \frac{1}{2}\,4\cdot 10^{-3}\cdot \text{ημ}^2\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{8}\ J \Rightarrow \boxed{U_B = 10^{-3} J}$

Γ. $C = \frac{q}{V_C} \Rightarrow V_C = \frac{q}{C} \Rightarrow V_C = \frac{10^{-4}}{2{,}5\cdot 10^{-6}}\,\text{συν}\,10^4 t \Rightarrow \boxed{V_C = 40\,\text{συν}\,10^4 t\ (= V_L)}$





Δ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2\cdot 10^{-2}}{4\pi^2\cdot 10^{-8}}\frac{N}{m} \Rightarrow \boxed{k = 10^6 \frac{N}{m}}$

1.19 | $f = \frac{5000}{\pi}$ Hz, $I = 5mA$ |

A. • $t_0 = 0$, $q = Q$, $i = 0$: $q = Q\,\text{συν}\,\omega t$ ①

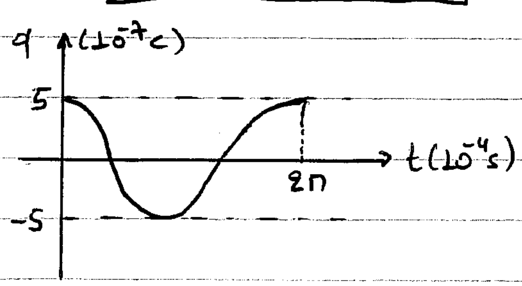
$i = -I\,\text{ημ}\,\omega t$ ②

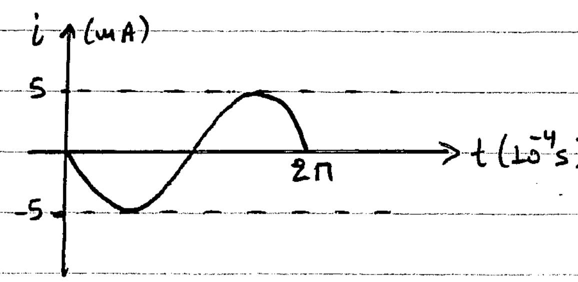
• $\omega = 2\pi f \Rightarrow \underline{\omega = 10^4 \ rad/s}$

• $I = \omega Q \Rightarrow Q = \frac{5\cdot 10^{-3}}{10^4}\,C \Rightarrow \underline{Q = 5\cdot 10^{-7} C}$

① $\Rightarrow \boxed{q = 5\cdot 10^{-7}\,\text{συν}\,10^4 t}$ (S.I.)

② $\Rightarrow \boxed{i = -5\cdot 10^{-3}\,\text{ημ}\,10^4 t}$ (S.I.)





Β. Α.Δ.Ε. Ταλάντωσης

$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow i^2 = \frac{1}{LC}(Q^2 - q^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2} \Rightarrow \boxed{i = -3\cdot10^{-3}A}$

Γ. 1) • $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 \cdot L} \Rightarrow \underline{C = 10^{-6}F}$

• $C = \frac{Q}{E} \Rightarrow E = \frac{Q}{C} \Rightarrow \boxed{E = 0{,}5\ V}$

2) $\frac{U_B}{E} = \frac{\frac{1}{2}LI^2 \eta\mu^2\omega t}{\frac{1}{2}LI^2} = \eta\mu^2 10^4 \cdot \frac{\pi}{4}\cdot 10^{-4}$ ή $\boxed{\frac{U_B}{E} = \frac{1}{2}}$

3) $n\% = \frac{U_E}{E}\cdot 100\% = \frac{E - U_B}{E}\cdot 100\% = \left(1 - \frac{\frac{1}{2}Li^2}{\frac{1}{2}LI^2}\right)\cdot 100\% = \left(1 - \frac{i^2}{I^2}\right)\cdot 100\%$

$\Rightarrow \Pi\% = \left(1 - \frac{6{,}25\cdot10^{-6}}{25\cdot10^{-6}}\right)\cdot 100\% \Rightarrow \boxed{\Pi\% = 75\%}$

1.20

$L = 10mH$
$U_B = 5\cdot10^{-5} - 5\cdot10^{5}q^2\ (S.I.)$

Α. $E = U_E + U_B \Rightarrow U_B = E - U_E \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow U_B = E - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \\ U_B = 5\cdot10^{-5} - 5\cdot10^{5}q^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ • $\underline{E = 5\cdot10^{-5}J}$

• $\frac{1}{2C} = 5\cdot10^{5} \Rightarrow \underline{C = 10^{-6}F}$

• $E = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \underline{I = 0{,}1A}$

• $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \underline{\omega = 10^4 rad/s}$

• $I = \omega Q \Rightarrow \underline{Q = 10^{-5}C}$

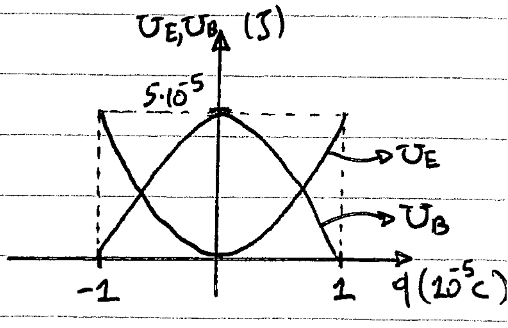
• $C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C} \Rightarrow \boxed{V = 10V}$

Β. $U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow U_E = 5\cdot10^{5}\cdot q^2$ ① (S.I.)

① $\xrightarrow{q=Q}$ $U_E = 5\cdot10^{-5}J$

① $\xrightarrow{q=0}$ $U_E = 0$

① $\xrightarrow{q=-Q}$ $U_E = 5\cdot10^{-5}J$



$U_B = E - U_E \Rightarrow U_B = 5\cdot10^{-5} - 5\cdot10^{5}q^2$ ② (S.I.)

② $\xrightarrow{q=Q}$ $U_B = 0$

② $\xrightarrow{q=0}$ $U_B = 5\cdot10^{-5}J$

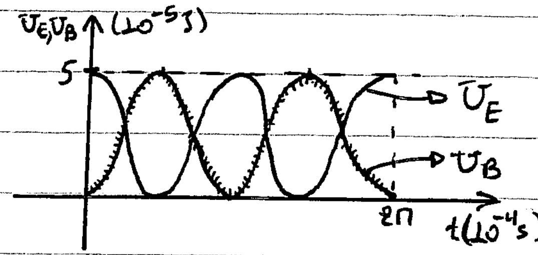
② $\xrightarrow{q=-Q}$ $U_B = 0$

$$E = U_E + U_B \xrightarrow{U_E = U_B} E = 2U_E \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = 2\cdot\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow q = \pm\frac{Q\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \pm 5\sqrt{2}\cdot 10^{-6} C}$$

Γ. • $U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\sigma\upsilon\nu^2\omega t \Rightarrow U_E = 5\cdot10^{-5}\sigma\upsilon\nu^2 10^4 t$

• $U_B = \frac{1}{2}LI^2\eta\mu^2\omega t \Rightarrow U_B = 5\cdot10^{-5}\eta\mu^2 10^4 t$



• Βάση το ερώτημα Β έχουμε $U_E = U_B$ όταν $q = \pm\frac{Q\sqrt{2}}{2}$, ενώ για πρώτη φορά όταν $q = +\frac{Q\sqrt{2}}{2}$, άρα:

$$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{Q\sqrt{2}}{2} = Q\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 10^4 t = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10^4 t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\kappa=0} \boxed{t_1 = 0{,}25\pi\cdot10^{-4} s} \\ 10^4 t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Δ. 1) • $\frac{dq}{dt} = i = -0{,}1\eta\mu 10^4 \frac{7\pi}{6}\cdot10^{-4} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -0{,}1\eta\mu(\pi + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = 0{,}1\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\frac{dq}{dt} = 0{,}05 A}$$

2) • $V_C = V_L \Rightarrow \frac{q}{C} = -L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\omega^2 q \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = -10^8\cdot10^{-5}\sigma\upsilon\nu 10^4\cdot\frac{7\pi}{6}\cdot10^{-4} \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = 500\sqrt{3} A/s}$$

3) $\frac{dU_E}{dt} = V_C\cdot i = \frac{q\cdot i}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{dU_E}{dt} = 0{,}25\sqrt{3} J/s}$

1.21 $\boxed{L = 1mH}$ Α. πληροφορίες από γραφική παράσταση $U_B = f(t)$

• $E = 4{,}5\cdot10^{-5} J$

• $T = 4\pi\cdot10^{-4} s$, $T = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} \Rightarrow C = 4\cdot10^{-5} F$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 5000 rad/s$

• $t_0 = 0$, $q = Q$, $i = 0$: $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ (1)

$i = -I\eta\mu\omega t$ (2)

• $E = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow I = 0{,}3A$

• $I = \omega Q \Rightarrow Q = 6\cdot10^{-5} C$

(1) $\Rightarrow \boxed{q = 6\cdot10^{-5}\sigma\upsilon\nu 5000t}$ (S.I.), (2) $\Rightarrow \boxed{i = -0{,}3\eta\mu 5000t}$ (S.I.)

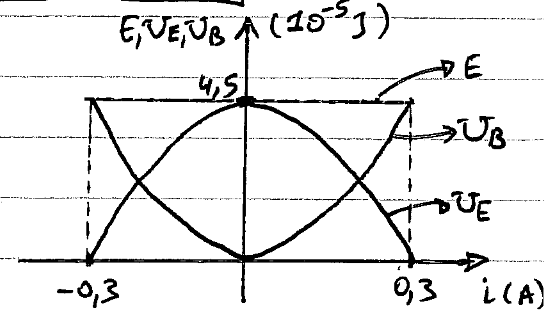
Β. $\frac{U_B}{E} = \frac{E-U_E}{E} = 1 - \frac{U_E}{E} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}} = 1 - \frac{q^2}{Q^2}$ ή $\boxed{\frac{U_B}{E} = \frac{3}{4}}$

Γ. $n\% = \frac{U_E}{E}\cdot 100\% = 75\% \Rightarrow U_E = \frac{3}{4}E$

• $E = U_E + U_B \Rightarrow U_B = \frac{1}{4}E \Rightarrow \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow i = \pm\frac{I}{2} = \pm 0{,}15A$

Άρα $\boxed{\frac{dq}{dt} = i = \pm 0{,}15\ A}$

Δ. • $E = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow E = 4{,}5\cdot 10^{-5}\,J$ (σταθ.)



• $U_B = \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow U_B = 5\cdot 10^{-4} i^2$ ③ (S.I.)

③ $\xrightarrow{i=I}$ $U_B = 4{,}5\cdot 10^{-5}\,J$

③ $\xrightarrow{i=0}$ $U_B = 0$

③ $\xrightarrow{i=-I}$ $U_B = 4{,}5\cdot 10^{-5}\,J$

• $U_E = E - U_B \Rightarrow U_E = 4{,}5\cdot 10^{-5} - 5\cdot 10^{-4} i^2$ ④ (S.I.)

④ $\xrightarrow{i=I}$ $U_E = 0$

④ $\xrightarrow{i=0}$ $U_E = 4{,}5\cdot 10^{-5}\,J$

④ $\xrightarrow{i=-I}$ $U_E = 0$

1.22. $L = 4m\,H$ | Α. Πληροφορίες από γραφική παράσταση $U_B = f(q)$:

• $E = 2\cdot 10^{-5}\,J$

• $Q = 0{,}4\mu C = 0{,}4\cdot 10^{-6}\,C$

• $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow C = \frac{Q^2}{2E} \Rightarrow C = \frac{0{,}16\cdot 10^{-12}}{4\cdot 10^{-5}}\,F \Rightarrow C = 4\cdot 10^{-9}\,F$

• $E = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{2E}{L}} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{4\cdot 10^{-5}}{4\cdot 10^{-3}}}\,A \Rightarrow I = 0{,}1A$

• $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{4\cdot 10^{-3}\cdot 4\cdot 10^{-9}}}$ rad/s $\Rightarrow \omega = 25\cdot 10^4$ rad/s

$t_0 = 0,\ q = Q,\ i = 0$: $q = Q\,συν\,\omega t \Rightarrow \boxed{q = 0{,}4\cdot 10^{-6}\,συν\,25\cdot 10^4 t}$ (S.I.)

$i = -I\,ημ\,\omega t \Rightarrow \boxed{i = -0{,}1\,ημ\,25\cdot 10^4 t}$ (S.I.)

$C = \frac{q}{V_C} \Rightarrow V_C = \frac{q}{C} \Rightarrow V_C = \frac{0{,}4\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-9}}\,συν\,25\cdot 10^4 t \Rightarrow \boxed{V_C = 100\,συν\,25\cdot 10^4 t}$ (S.I.)

Β. $E = U_E + U_B \xrightarrow{U_E = 3U_B} E = 4\cdot U_B \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = 4\cdot\frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow i = \pm\frac{I}{2} \xrightarrow{2η\ φορά}$

$\Rightarrow \boxed{i = -0{,}05\ A}$

• $i = -0{,}1\,\eta\mu\, 25\cdot 10^4 t \Rightarrow -0{,}05 = -0{,}1\,\eta\mu\, 25\cdot 10^4 t \Rightarrow \eta\mu\, 25\cdot 10^4 t = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \begin{cases} 25\cdot 10^4 t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 25\cdot 10^4 t = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \xRightarrow{k=0} \begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{15}\cdot 10^{-5}\, s \\ t_2 = \frac{5\pi}{25\cdot 10^4\cdot 6}\, s \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{\pi}{3}\cdot 10^{-5} s} \end{cases}$

Γ. $E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow i^2 = \frac{1}{CL}(Q^2 - q^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2} \Rightarrow i = \pm 25\cdot 10^4\sqrt{0{,}16\cdot 10^{-12} - 0{,}12\cdot 10^{-12}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{i = \pm 0{,}05 A = \frac{dq}{dt}}$

Δ. $\Pi\% = \frac{U_B}{E}\cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{\frac{1}{2}LI^2}\cdot 100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{i^2}{I^2}\cdot 100\% \Rightarrow$

$\Rightarrow \Pi\% = \frac{25\cdot 10^{-4}}{10^{-2}}\cdot 100\% \Rightarrow \boxed{\Pi\% = 25\%}$

1.23. $K = 400\ N/m$

$x = 0{,}2\, e^{-2\ln 2\cdot t}\,\sigma\upsilon\nu 10\pi t\ (S.I.)$

A. $\left.\begin{matrix} x = A_0 e^{-\Lambda t}\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t \\ x = 0{,}2\, e^{-2\ln 2\, t}\,\sigma\upsilon\nu 10\pi t \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

• $\boxed{A_0 = 0{,}2\, m}$

• $\boxed{\Lambda = 2\ln 2\ s^{-1}}$

• $\omega = 10\pi\ rad/s$

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 0{,}2s}$ (=σταθερό για σταθερή τιμή του b).

B. • $A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\Lambda t \ln e \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda} \Rightarrow \boxed{t = 0{,}5\, s}$

Γ. • $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \Rightarrow A = 0{,}05 m$

• $A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow 0{,}05 = 0{,}2\, e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln\frac{1}{4} = \ln e^{-\Lambda t}$

$\Rightarrow \ln 1 - \ln 4 = -\Lambda t \ln e \Rightarrow t = \frac{\ln 4}{\Lambda} \Rightarrow t = \frac{\ln 2^2}{2\ln 2}\, s \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{2\ln 2}{2\ln 2}\, s \Rightarrow \boxed{t = 1 s}$

Δ. $A = A_0 e^{-\Lambda t} \xRightarrow{t = 5T = 1s} A = 0{,}2\, e^{-2\ln 2\cdot 1} \Rightarrow A = 0{,}2\, e^{\ln 2^{-2}} \Rightarrow A = 0{,}2\cdot 2^{-2}\, m$

$\Rightarrow A = \frac{0,2}{4} m \Rightarrow A = 0,05 m$

• $E_{απωλειών} = E_0 - E = \frac{1}{2}k(A_0^2 - A^2) \Rightarrow \boxed{E_{απωλειών} = 7,5 J}$

• $W_{Fαπ} = -E_{απωλειών} \Rightarrow \boxed{W_{Fαπ} = -7,5 J}$

1.24 $m = 1 kg$
$\Sigma F = -100 \cdot x - \ln 2 \cdot u$ (S.I.)
$A = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$, $E_0 = 32 J$

A. $\begin{cases} \Sigma F = -k \cdot x - b \cdot u \\ \Sigma F = -100 \cdot x - \ln 2 \cdot u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ \underline{k = 100\ N/m} \\ \cdot\ \underline{b = \ln 2\ kg/s} \end{cases}$

$E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 \Rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \Rightarrow \boxed{A_0 = 0,8 m}$

B. $\left.\begin{matrix} A = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \\ A = A_0 e^{-\Lambda t} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Lambda = \frac{b}{2m} \Rightarrow \boxed{\Lambda = 0,5 \ln 2\ s^{-1}}$

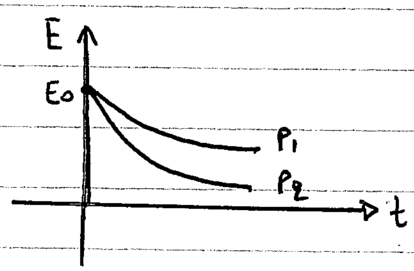
Γ. $A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow 0,4 = 0,8\ e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\Lambda t_1 \ln e \Rightarrow t_1 = \frac{\ln 2}{0,5 \ln 2} s \Rightarrow \boxed{t_1 = 2 s}$

Δ. • $A = A_0 e^{-\Lambda t} \xrightarrow{t_2 = 2t_1 = 4s} A_2 = 0,8 \cdot e^{-0,5\ln 2 \cdot 4} \Rightarrow A_2 = 0,8 \cdot e^{-2\ln 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = 0,8 e^{\ln 2^{-2}} \Rightarrow A_2 = 0,8 \cdot 2^{-2} \Rightarrow A_2 = \frac{0,8}{2^2} \Rightarrow \boxed{A_2 = 0,2 m}$

• $W_{Fαπ} = -E_{απωλ.} = -(E_0 - E_2) = -(\frac{1}{2}kA_0^2 - \frac{1}{2}kA_2^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow W_{Fαπ} = -\frac{1}{2}k(A_0^2 - A_2^2) \Rightarrow \boxed{W_{Fαπ} = -30 J}$

Ε. 

Όσο αυξάνει η πίεση, αυξάνει και η σταθερά απόσβεσης b με αποτέλεσμα να αυξάνει ο ρυθμός με τον οποίο το σύστημα χάνει ενέργεια.

$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow \underline{E = E_0 \cdot e^{-2\Lambda t}}$

1.25

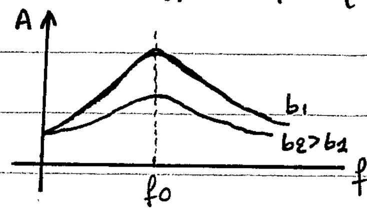
$m = 1\,kg$

$k = \pi^2\,N/m$

$F = -b\cdot\upsilon$

Α. $\underline{f_\delta = f_0} \Rightarrow f_\delta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{f_\delta = 0{,}5\,Hz}$

Β. Από τη γραφική παράσταση $A = f(f)$ έχουμε:



παρατηρούμε ότι αν ελαττώσαμε τη σταθερά απόσβεσης b το πλάτος αυξάνει.

Γ. • Το πλάτος μετά από μια περίοδο θα είναι $A = A_0 - \frac{20}{100}A_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow A = 0{,}8A_0$. Αντίστοιχα η ενέργεια που το σύστημα χάνει θα είναι $E_{απωλειών} = E_0 - E = E_0 - \frac{1}{2}k\,0{,}64\,A_0^2 \Rightarrow E_{απωλ} = 0{,}36\cdot E_0$

$\xrightarrow{E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = 0{,}05J} \underline{E_{απωλ.} = 0{,}018\,J}$

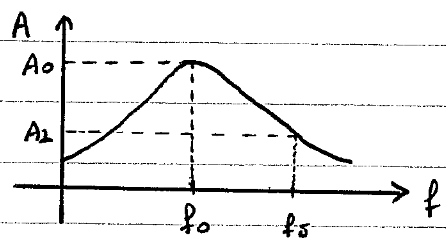
• Η περίοδος είναι: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2s$

$\Delta t = N\cdot T \Rightarrow N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{200}{2} \Rightarrow N = 100$ ταλαντώσεις

• Άρα η ενέργεια που πρέπει να αναπληρώσει ο διεγέρτης σε 200s είναι:

$E_{ολ} = N\cdot E_{απωλ} \Rightarrow \boxed{E_{ολ} = 1{,}8\,J}$

Δ. $f_\delta = 2f_0 = 1\,Hz$



Διπλασιάζοντας τη συχνότητα του διεγέρτη από την κατάσταση συντονισμού το πλάτος της ταλάντωσης θα μειωθεί ($A_1 < A_0$).

Ε. $\frac{U_{max}}{K_{max}} = \frac{\frac{1}{2}kA_1^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2} = \frac{k\cdot A_1^2}{m\cdot\omega_\delta^2 A_1^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_\delta^2} = \frac{(2\pi f_0)^2}{(2\pi f_\delta)^2} = \frac{f_0^2}{f_\delta^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{U_{max}}{K_{max}} = \frac{1}{4}}$

1.26

$m = 1\,kg$

$\Sigma F = -400x - 0{,}2\upsilon + F_0\,συν12t$ (S.I.)

Α. $\begin{cases} \Sigma F = -k\cdot x - b\cdot\upsilon + F_0\,συν\omega_\delta\cdot t \\ \Sigma F = -400x - 0{,}2\upsilon + F_0\,συν12t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ • $\underline{k = 400\,N/m}$

• $\underline{b = 0{,}2\,kg/s}$, • $\omega_\delta = 12\,\frac{rad}{s} \xrightarrow{\omega_\delta = 2\pi f_\delta} \boxed{f_\delta = \frac{6}{\pi}\,Hz = f_{συστήματος}}$

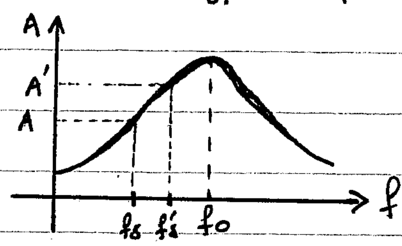
• $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{10}{\pi}\,Hz}$

Β. • $\begin{cases} x = 0{,}1\,ημωt \\ x = A\,ημωt \end{cases} \Rightarrow \underline{A = 0{,}1m}$

• $\left.\begin{array}{l} υ = υ_{max}\,συν\,ω_δ t \\ υ_{max} = ω_δ \cdot A = 1{,}2\,m/s \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{υ = 1{,}2\,συν\,12t}$ (S.I.)

• $F = -b \cdot υ \Rightarrow \boxed{F = -0{,}24\,συν\,12 \cdot t}$ (S.I.)

Γ. Από τη γραφική παράσταση πλάτους - συχνότητας έχουμε:



Παρατηρούμε ότι το πλάτος αυξάνει ($A' > A$) αν αυξήσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη από $f_δ = \frac{6}{\pi}\,Hz$ σε $f'_δ = \frac{8}{\pi}\,Hz$ ($f_0 = \frac{10}{\pi}\,Hz$).

Δ. Στην κατάσταση συντονισμού η εξωτερική περιοδική δύναμη και η δύναμη απόσβεσης είναι κάθε στιγμή αντίθετες.

$F_δ = -F_{αποσβ} \xrightarrow{F_{απ} = -bυ} F_δ = b \cdot υ \Rightarrow F_δ = b \cdot υ_{max}\,συν\,ω_0 t$ ①

• $ω_0 = 2\pi f_0 \Rightarrow ω_0 = 20\,rad/s$

• $υ_{max} = ω_0 A = 3\,m/s$

① $\Rightarrow \boxed{F_δ = 0{,}6\,συν\,20t}$ (S.I.)

Ε. Στην κατάσταση συντονισμού ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα είναι ίσος με το ρυθμό με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σύστημα.

• $P_{απόσβεσης} = F_{αποσβ.} \cdot υ = -bυ^2 = -0{,}2 \cdot 3^2\,συν^2 20t = -1{,}8\,συν^2 20t$

$\Rightarrow P_{αποσβ.} = -1{,}8\,συν^2 20\frac{\pi}{80} \Rightarrow \boxed{P_{αποσβ.} = -0{,}9\,W}$

• $P_δ = |P_{αποσβ.}| \Rightarrow \boxed{P_δ = 0{,}9\,W}$

1.27

$m = 1\,kg$
$x_1 = 2ημπt$
$x_2 = 2\sqrt{3}ημ(πt + \frac{π}{2})$
$(x_1, x_2 \text{ σε } cm)$

A. $x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = Aημ(ωt + θ)$ (1)

• $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνΔφ} \xrightarrow[Δφ = π/2\ rad]{A_1 = 2cm,\ A_2 = 2\sqrt{3}\,cm}$

$\Rightarrow \underline{A = 4cm}$

• $εφθ = \frac{A_2ημΔφ}{A_1 + A_2συνΔφ} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $\underline{θ = \frac{π}{3}\,rad}$

(1) $\Rightarrow \underline{x = 4ημ(πt + \frac{π}{3})}$, (το x σε cm)

$$\left.\begin{array}{l} α = -α_{max}ημ(ωt + θ) \\ α_{max} = ω^2A = 0{,}4\,m/s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{α = -0{,}4ημ(πt + \frac{π}{3})} \quad (S.I.)$$

B.
$$\left.\begin{array}{l} U = \frac{1}{2}Dx^2 \\ D = mω^2 = 10\,N/m \end{array}\right\} \Rightarrow U = \frac{1}{2}\cdot 10 \cdot 16 \cdot 10^{-4}ημ^2(\frac{2π}{T}\cdot\frac{T}{12} + \frac{π}{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = 8\cdot 10^{-3}ημ^2\frac{π}{2} \Rightarrow \boxed{U = 8\cdot 10^{-3}\,J}$$

Γ. $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mυ^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow mυ^2 = mω^2(A^2 - x^2)$

$\Rightarrow υ = \pm ω\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow |υ| = π\sqrt{16\cdot 10^{-4} - 7\cdot 10^{-4}}\,m/s \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{|υ| = 3π\cdot 10^{-2}\,m/s}$

Δ. $F = -D\cdot x \Rightarrow F = -0{,}4ημ(πt + \frac{π}{3}) \Rightarrow F = -0{,}4ημ(\frac{π}{2} + \frac{π}{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow F = -0{,}4ημ\frac{5π}{6} \Rightarrow F = -0{,}4ημ(π - \frac{π}{6}) \Rightarrow F = -0{,}4ημ\frac{π}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{F = -0{,}2N}$

1.28.

$m = 1\,kg$
$x_1 = 0{,}2\sqrt{3}ημωt$ (S.I.)
$x_2 = 0{,}2\sqrt{3}ημ(ωt + φ_0)$ (S.I.)
$D = 100\,N/m$
$t: φ_1 = \frac{π}{2}\,rad,\ φ_2 = \frac{5π}{6}\,rad$

$$\left.\begin{array}{l} \text{A. } \bullet\ Δφ = φ_2 - φ_1 = ωt + φ_0 - ωt \text{ ή } Δφ = φ_0 \\ t: Δφ = φ_2 - φ_1 = \frac{5π}{6} - \frac{π}{2} \text{ ή } Δφ = \frac{π}{3}\,rad \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{φ_0 = \frac{π}{3}\,rad}$

• $D = mω^2 \Rightarrow ω = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \underline{ω = 10\,rad/s}$

• $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνΔφ} \Rightarrow \underline{A = 0{,}6m}$

• $εφθ = \frac{A_2ημΔφ}{A_1 + A_2συνΔφ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\underline{θ = \frac{π}{6}\,rad}$

• $x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = A\eta\mu(\omega t + \theta) \Rightarrow \boxed{x = 0{,}6\,\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)}$ (S.I.)

Β. $\phi_1 = \omega t \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 10t \Rightarrow \underline{t = \frac{\pi}{20}\,s}$

$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \upsilon_{max}\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \theta) \\ \upsilon_{max} = \omega A = 6\,m/s \end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon = 6\,\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \upsilon = 6\,\sigma\upsilon\nu\left(10\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{6}\right) =$

$\Rightarrow \upsilon = 6\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \upsilon = 6\,\sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \upsilon = 6\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\upsilon = -3\,m/s}$

Γ. ΘΜΚΕ: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow \Sigma W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Sigma W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2$

$\Rightarrow \Sigma W_F = \left(\frac{1}{2}\cdot 36 - \frac{1}{2}\,9\right)J \Rightarrow \boxed{\Sigma W_F = 13{,}5\,J}$

Δ. $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = -D\cdot x\cdot \upsilon = -100\cdot 0{,}6\,\eta\mu\left(10\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{6}\right)\cdot(-3)\ J/s \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = 180\cdot\eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) J/s \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 180\,\eta\mu\frac{\pi}{3}\,\frac{J}{s} \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = 90\sqrt{3}\ J/s}$

1.29

$m = 5\,kg$
$x_1 = 2\sqrt{3}\,\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$
$x_2 = 2\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu(2\pi t)$
(x_1, x_2 σε cm)

Α. $\left\{\begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{3}\,\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \\ x_2 = 2\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu(2\pi t) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{3}\,\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \\ x_2 = 2\sqrt{3}\,\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x = A\,\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \theta\right)$ (1)

• $\Delta\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \underline{\Delta\phi = \frac{\pi}{3}\,rad}$

• $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\,\sigma\upsilon\nu\Delta\phi} \Rightarrow \underline{A = 6\,cm = 0{,}06\,m}$

• $\varepsilon\phi\theta = \frac{A_2\,\eta\mu\Delta\phi}{A_1 + A_2\,\sigma\upsilon\nu\Delta\phi} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\underline{\theta = \frac{\pi}{6}\,rad}$

(1) $\Rightarrow x = 0{,}06\,\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \boxed{x = 0{,}06\,\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)}$ (S.I.)

Β. $\left.\begin{array}{l} E = \frac{1}{2}DA^2 \\ D = m\omega^2 = 200\,N/m \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{E = 0{,}36\,J}$

Γ. $\left|\frac{dp}{dt}\right|_{max} = \Sigma F_{max} = DA \Rightarrow \boxed{\left|\frac{dp}{dt}\right|_{max} = 12\,kg\,m/s^2}$

Δ. • $\left.\begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = a = 0,8\, m/s^2 \\ a = -\omega^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x = -0,02 m}$

• $\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}kx^2} = \frac{A^2-x^2}{x^2} = \frac{A^2}{x^2} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{K}{U} = 8}$

1.30

$m = 0,05\ kg$
$x = 0,02\, συν 2\pi t\, ημ\omega t$ (S.I.)
$x_1 = Aημ 202\pi t$
$x_2 = Aημ\omega_2 t$, $(\omega_1 > \omega_2)$

A. $\left\{\begin{array}{l} x = 2A\, συν\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\; ημ\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t \\ x = 0,02\, συν 2\pi t\; ημ\, \omega t \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ • $2A = 0,02 m \Rightarrow \underline{A = 0,01 m}$

• $\frac{\omega_1-\omega_2}{2} = 2\pi \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = 4\pi \xrightarrow{\omega_1 = 202\pi\ rad/s}$

$\Rightarrow \underline{\omega_2 = 198\pi\ rad/s}$

• $\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \Rightarrow \boxed{\omega = 200\pi\ rad/s}$

B. $\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0,01\, ημ\, 202\pi t \\ x_2 = 0,01\, ημ\, 198\pi t \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{x = 0,02\, συν 2\pi t\, ημ 200\pi t}$ (S.I.)

Γ. • $f_δ = |f_1 - f_2|$ ①

$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = 101\,Hz \\ \omega_2 = 2\pi f_2 \Rightarrow f_2 = 99\,Hz \end{array}\right\} \xrightarrow{①} \boxed{f_δ = 2\,Hz}$

• $\left.\begin{array}{l} \omega = 2\pi f \Rightarrow f = 100\,Hz \\ \Delta t = T_δ = \frac{1}{f_δ} = 0,5 s \end{array}\right\} \Rightarrow f = \frac{N}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{N = 50\ \text{ταλαντώσεις}}$

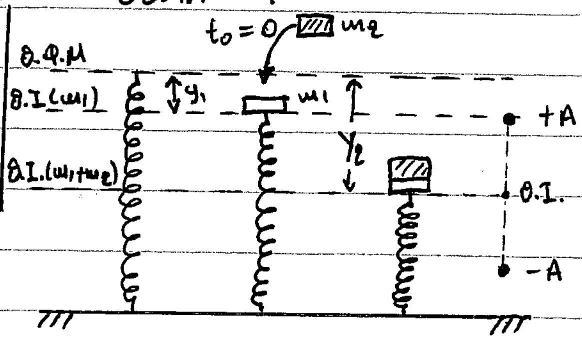
Δ. $f_δ = \frac{N'}{\Delta t'} \Rightarrow N' = f_δ \cdot \Delta t' \Rightarrow \boxed{N' = 10\ \text{μεγιστοποιήσεις}}$

1.1.

$m_1 = 1\,kg$

$k = 100\,N/m$

$t_0 = 0$, $m_2 = 3\,kg$



A. • Θ.Ι.(m_1): $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W_1 = 0 \Rightarrow k y_1 = m_1 g \Rightarrow \underline{y_1 = 0{,}1\,m}$

• Θ.Ι.(m_1+m_2): $\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ} - W_{ολ} = 0 \Rightarrow k y_2 = (m_1+m_2) g \Rightarrow \underline{y_2 = 0{,}4\,m}$

• Τη στιγμή $t_0=0$ που τοποθετούμε το σώμα m_2 πάνω στο m_1 το σύστημα έχει μηδενική ταχύτητα ($υ_0=0$) άρα η θέση αυτή είναι θέση πλάτους για την ταλάντωση: $A = y_2 - y_1 \Rightarrow \underline{A = 0{,}3\,m}$

• $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \underline{\omega = 5\,rad/s}$

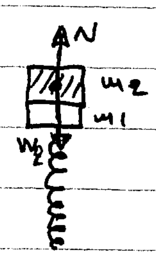
• $y = A ημ(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[y=+A]{t_0=0} A = A ημ\varphi_0 \Rightarrow ημ\varphi_0 = 1 = ημ\frac{\pi}{2}$ ή $\underline{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\,rad}$

Άρα $\boxed{y = 0{,}3\,ημ(5t + \frac{\pi}{2})}$ (S.I.)

• $x = +A$: $F_{ελ(min)} = k(y_2 - A) \Rightarrow \boxed{F_{ελ(min)} = 10N}$

• $x = -A$: $F_{ελ(max)} = k(y_2 + A) \Rightarrow \boxed{F_{ελ(max)} = 70N}$

B.



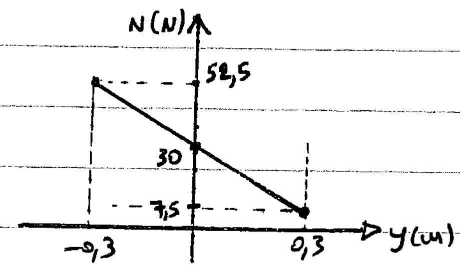
• α.α.τ. (m_2)

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F = -D_{m_2} \cdot y \\ D_{m_2} = m_2 \cdot \omega^2 = 75\,N/m \end{array}\right\} \Rightarrow N - W_2 = -m_2\omega^2 \cdot y \Rightarrow \underline{N = 30 - 75y} \text{ (S.I.)}$$

$(1) \xrightarrow{y=A} N = 7{,}5N$

$(1) \xrightarrow{y=0} N = 30N$

$(1) \xrightarrow{y=-A} N = 52{,}5N$



Γ. $\left\{\begin{array}{l} y = 0{,}3\,ημ(5t + \frac{\pi}{2}) \\ y' = 0{,}3\sqrt{3}\,ημ5t \end{array}\right. \Rightarrow y = y_1 + y_2 \Rightarrow y = A ημ(\omega t + \theta)$

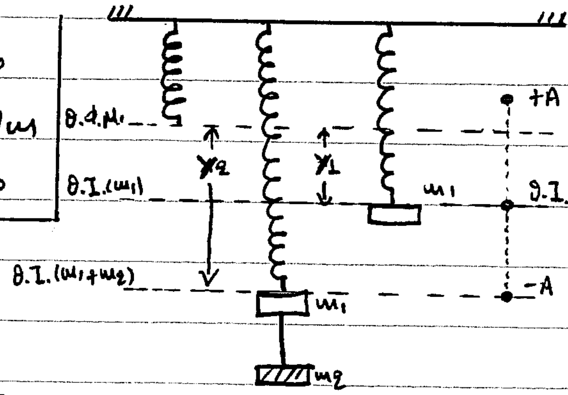
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 συν\Delta\varphi} \Rightarrow A = 0{,}6\,m \\ \bullet\ εφ\theta = \dfrac{0{,}3\,ημ\frac{\pi}{2}}{0{,}3\sqrt{3} + 0{,}3\,συν\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \theta = \dfrac{\pi}{6}\,rad \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = 0{,}6\,ημ(5t + \frac{\pi}{6})} \text{ (S.I.)}$$

Δ. $A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow 0{,}3 = 0{,}6 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\Lambda t \ln e \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 2}\, s \Rightarrow \boxed{t = 1s}$

1.2.

$m_1 = 0{,}5\ kg$
$k = 50\ N/m$
$m_2 = 1\ kg$



A. • Θ.Ι.(m_1): $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - W_1 = 0$

$\Rightarrow k y_1 = m_1 g \Rightarrow \underline{y_1 = 0{,}1}$

• Θ.Ι.(m_1+m_2): $\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} - W_{o\lambda} = 0$

$\Rightarrow k y_2 = (m_1+m_2) g \Rightarrow \underline{y_2 = 0{,}3}$

• Τη στιγμή $t_0 = 0$ που κόβουμε το νήμα το σύστημα δεν έχει ταχύτητα άρα η θέση αυτή είναι θέση πλάτους για την ταλάντωση του m_1: $A = y_2 - y_1 \Rightarrow \underline{A = 0{,}2m}$

• $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \underline{\omega = 10\ rad/s}$

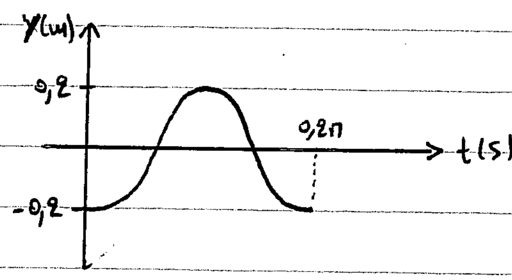
• $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[x=-A]{t_0=0} -A = A\eta\mu\varphi_0$

$\Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2}$ ή $\underline{\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\ rad}$

• $\boxed{y = 0{,}2\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})}$ ① (S.I.)

① $\overset{t=0}{\Longrightarrow}$ $y = -0{,}2m$

Για $t>0$ το ημίτονο αυξάνει



B. $y = -A$: $F_{\varepsilon\lambda(max)} = k \cdot y_2 \Rightarrow \boxed{F_{\varepsilon\lambda(max)} = 15N}$

$F_{\varepsilon\pi(max)} = kA \Rightarrow \boxed{F_{\varepsilon\pi(max)} = 10N}$

Γ. • Τη στιγμή που είναι στη θέση $y = 0{,}1m$ και απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας θα έχει θετική ταχύτητα $\upsilon > 0$.

• $\frac{d\upsilon}{dt} = a = -\omega^2 y \Rightarrow \boxed{\frac{d\upsilon}{dt} = -10\ m/s^2}$

• $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon = 10\sqrt{0{,}04 - 0{,}01} \Rightarrow \underline{\upsilon = \sqrt{3}\ m/s}$

• $\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F \cdot \upsilon = +k y \upsilon \Rightarrow \frac{dU}{dt} = +50 \cdot 0{,}1 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dU}{dt} = 5\sqrt{3}\ J/s}$

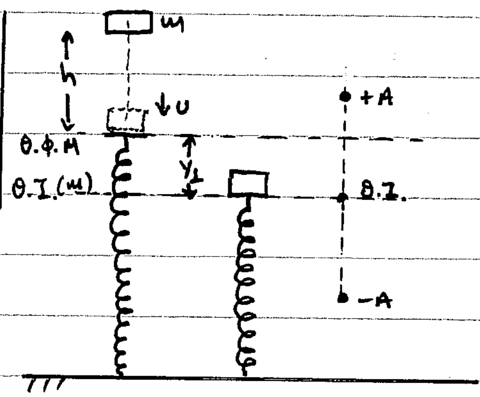
Δ. • Τη στιγμή που το m_1 ακινητοποιείται για πρώτη φορά θα βρίσκεται στη θέση $y=+A$, έχοντας διανύσει απόσταση $\underline{S_1 = 2A = 0,4m}$ σε χρόνο $t = \frac{T}{2} \xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}} t = 0,1\pi\, s$

• Στον ίδιο χρόνο το σώμα m_2 εκτελώντας ελεύθερη πτώση θα έχει διανύσει απόσταση $S_2 = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \underline{S_2 = 0,5m}$

• Λαμβάνοντας υπόψιν και το μήκος του νήματος $d = 0,1m$ έχουμε: $S = S_1 + d + S_2 \Rightarrow \boxed{S = 1m}$

1.3.

$k = 80\ N/m$
$m = 0,8\ kg$
$h = 0,15m$



A. • Ελεύθερη πτώση (m):

$y = \frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{y=h} \underline{t = 0,1\sqrt{3}\, s}$

$υ = g t \Rightarrow \boxed{υ = \sqrt{3}\ m/s}$

B. • Θ.Ι.(m): $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W = 0$

$\Rightarrow k \cdot y_1 = mg \Rightarrow \underline{y_1 = 0,1m}$

• ΑΔΕΤ: $E = K + U \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m υ^2 + \frac{1}{2} k y_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A = 0,2m}$

• $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \underline{\omega = 10\ rad/s}$

• $y = A ημ(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[y=y_1]{t_0=0} 0,1 = 0,2\, ημ\varphi_0 \Rightarrow ημ\varphi_0 = ημ\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow$

$\xrightarrow{k=0} \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}, & υ > 0 \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}, & υ < 0 \end{cases}$ Άρα $\underline{\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}\ rad}$

$\boxed{y = 0,2\, ημ(10t + \frac{5\pi}{6})}$ (S.I.)

B. • α.α.τ. (m)

$\Sigma F = -Dy \Rightarrow F_{ελ} - W = -ky \Rightarrow F_{ελ} = mg - ky \Rightarrow \boxed{F_{ελ} = 8 - 80 y}$ (1) (S.I.)

Δ. Το σώμα m θα αποχωριστεί από το ελατήριο τη στιγμή που η δύναμη του ελατηρίου μηδενιστεί.

(1) $\xrightarrow{F_{ελ}=0} 0 = 8 - 80y \Rightarrow \boxed{y = 0,1m}$ δηλαδή όταν περνά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

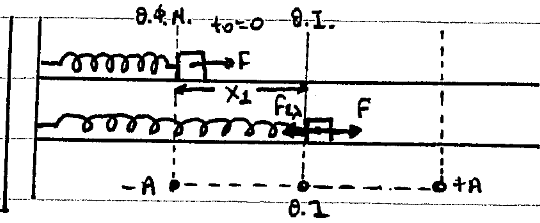
$y=0,2\,ημ(10t+\frac{5π}{6}) \Longrightarrow 0,1=0,2\,ημ(10t+\frac{5π}{6}) \Rightarrow ημ(10t+\frac{5π}{6})=\frac{1}{2}=ημ\frac{π}{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10t+\frac{5π}{6}=2κπ+\frac{π}{6} \xrightarrow{κ=1} \boxed{t_1=\frac{2π}{15}s} \\ 10t+\frac{5π}{6}=2κπ+π-\frac{π}{6} \xrightarrow{κ=0} t_0=0 \end{cases}$$

1.4 $m=1kg$

$k=100\ N/m$

$F=40N$ (σταθ.)



• Θ.Ι.: $ΣF=0 \Rightarrow F=F_{ελ} \Rightarrow$

$\Rightarrow F=k\cdot x_1$ (1)

• Τυχαία θέση δεξιά της Θ.Ι.:

$ΣF=F-F'_{ελ}=F-k(x_1+x) \xRightarrow{(1)}$

$\boxed{ΣF=-k\cdot x}$ Άρα το σύστημα θα εκτελέσει α.α.τ. με $D=k=100\ N/m$

A. • $(1) \Rightarrow x_1=\frac{F}{k} \Rightarrow \underline{x_1=0,4m\ (=A)}$

• $ω=\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \underline{ω=10\ rad/s}$

• $x=Aημ(ωt+φ_0) \xrightarrow[x=-A]{t_0=0} -A=Aημφ_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow ημφ_0=-1=ημ\frac{3π}{2}$ ή $\underline{φ_0=\frac{3π}{2}\ rad}$

$$\boxed{x=0,4\,ημ(10t+\frac{3π}{2})} \quad (S.I.)$$

B. • $α=-ω^2x \Rightarrow x=\frac{α}{-ω^2} \Rightarrow \underline{x=0,1\sqrt{7}\,m}$

• $E=K+U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mυ^2+\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow υ^2=ω^2(A^2-x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow υ=\pm ω\sqrt{A^2-x^2} \Rightarrow \underline{υ=\pm 3\ m/s}$

• $p=mυ \Rightarrow \boxed{|p|=3\ kg\,m/s}$

Γ. • $\frac{dp}{dt}=10\ kg\,m/s^2 \Rightarrow ΣF=10\ kg\,m^2/s \Rightarrow -k\cdot x=10\ kg\,m^2/s \Rightarrow \underline{x=-0,1m}$

• $Π\%=\frac{U_ε}{E}\cdot 100\%=\frac{\frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}kA^2}100\%=\frac{x^2}{A^2}100\%$ ή $\boxed{Π\%=6,25\%}$

Δ. 1) $W_F=E' \Rightarrow F\cdot 2A=E' \Rightarrow \boxed{E'=32J}$

2) $W_F=E'' \Rightarrow 0=E'' \Rightarrow \boxed{E''=0}$

1.5

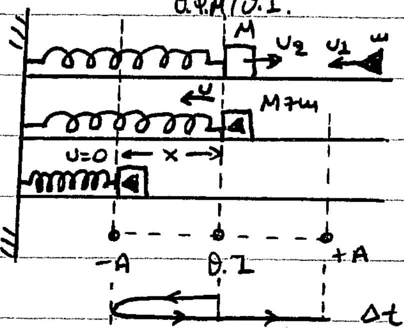
$M = 9\ kg$

$k = 160\ N/m$

$m = 1\ kg$

$\upsilon_1 = 19\ m/s$

$\upsilon_2 = 1\ m/s$



Α. Κρούση αντιπλαστική (πλαστική)

Α.Δ.Ορμής

$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$

$M\upsilon_2 - m\upsilon_1 = -(M+m)\upsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\upsilon = 1\ m/s}$

Β. Η κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας άρα

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon = \upsilon_{max} = \omega A \\ &\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \Rightarrow \omega = 4\ rad/s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}25\ m\ (= x)}$$

Γ. $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}\ s$

Το συσσωμάτωμα θα φτάσει στη θέση μέγιστης επιμήκυνσης του ελατηρίου $(x = +A)$ σε χρόνο $\Delta t = \frac{3T}{4} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{3\pi}{8}\ s}$

Δ. • $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[x=0]{t_0=0} 0 = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 0 = \eta\mu 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2\kappa\pi + 0 \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi - 0 \end{cases} \xRightarrow{\kappa=0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 & , \upsilon > 0 \\ \varphi_0 = \pi & , \upsilon < 0 \end{cases} \quad \text{Άρα } \underline{\varphi_0 = \pi\ rad}$$

$\boxed{x = 0{,}25\,\eta\mu(4t + \pi)}$ (S.I.)

Ε. • $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{E = 5\ J}$

• $E = K + U \xRightarrow{K = 3U} E = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = 4\cdot\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2} \xRightarrow{1\eta\ \varphi o\rho\acute{\alpha}}$

$\Rightarrow \boxed{x = -0{,}125\ m}$

• $x = 0{,}25\,\eta\mu(4t+\pi) \Rightarrow -0{,}125 = 0{,}25\,\eta\mu(4t+\pi) \Rightarrow \eta\mu(4t+\pi) = -\frac{1}{2} = -\eta\mu\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \eta\mu(4t+\pi) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 4t + \pi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ 4t + \pi = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \xRightarrow{\kappa=0} \boxed{t_1 = \frac{\pi}{24}\ s}$

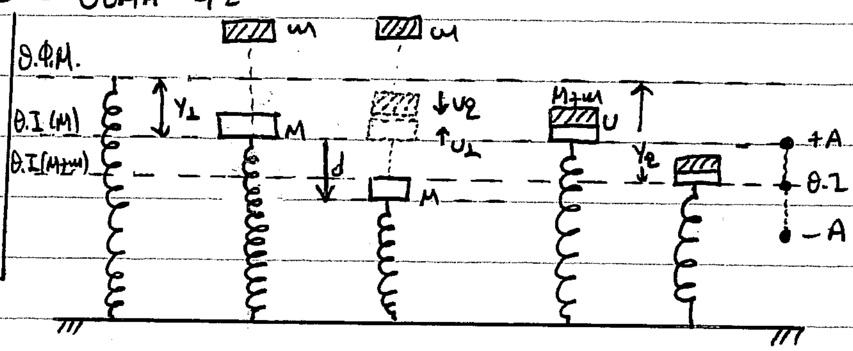
1.6

$k = 100\ N/m$

$M = 4\ kg$

$m = 1\ kg$

$d = \frac{\pi}{20}\ m$



A. • α.α.τ. του σώματος Μ

$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow \omega = 5\ rad/s$

$A = d = \frac{\pi}{20}\ m$

Στη θέση ισορροπίας το σώμα Μ θα φτάσει σε χρόνο $t = \frac{T}{4} \xrightarrow{T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,4\pi\ s} \underline{t = 0,1\pi\ s}$, με ταχύτητα $U_1 = U_{max} \Rightarrow$

$\Rightarrow U_1 = \omega A \Rightarrow \underline{U_1 = \frac{\pi}{4}\ m/s}$

• Ελεύθερη πτώση του σώματος m

Στον ίδιο χρόνο $t = 0,1\pi\ s$ το σώμα m θα έχει διανύσει απόσταση $h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \boxed{h = 0,5\ m}$ και θα έχει αποκτήσει ταχύτητα $U_2 = g t \Rightarrow \underline{U_2 = \pi\ m/s}$

B. • κρούση ανελαστική (πλαστική)

Α.Δ. Ορμής : $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

$M U_1 - m U_2 = (M+m) U \Rightarrow 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 \cdot \pi = 5U \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{U = 0}$

Γ. • Θ.Ι (Μ) : $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W = 0 \Rightarrow k y_1 = M g \Rightarrow \underline{y_1 = 0,4\ m}$

• Θ.Ι.(Μ+m) : $\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ} - W_{ολ} = 0 \Rightarrow k \cdot y_2 = (M+m) g \Rightarrow \underline{y_2 = 0,5\ m}$

Η θέση ισορροπίας του σώματος Μ, είναι θέση πλάτους για την ταλάντωση του συσσωματώματος αφού εκεί έχει $U = 0$.

Άρα $A = y_2 - y_1 \Rightarrow \boxed{A = 0,1\ m}$

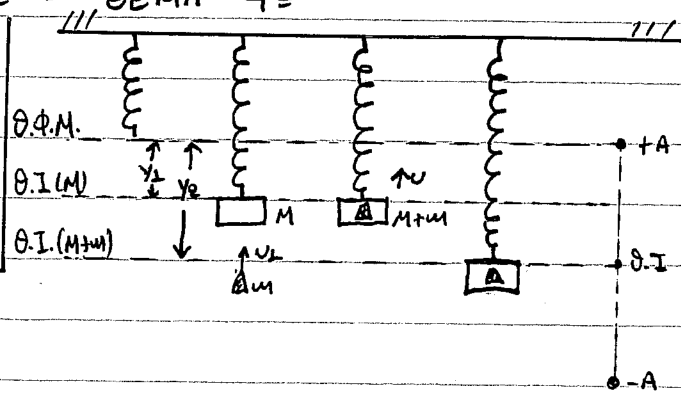
Δ. $x = -A$: $|F_{ελ(max)}| = k \cdot (y_2 + A) \Rightarrow \boxed{|F_{ελ(max)}| = 60\ N}$

1.7 $M=1\,kg$

$k=200\,N/m$

$m=1\,kg$

$u_1=\sqrt{3}\,m/s$



A. • Κρούση πλαστική (πλαστική)

Α.Δ. Ορμής: $\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ}$

$m u_1=(M+m)u \Rightarrow \underline{u=\frac{\sqrt{3}}{2}\,m/s}$

• Θ.Ι.(Μ): $\Sigma F=0 \Rightarrow F_{ελ}-W=0 \Rightarrow k\cdot y_1=Mg \Rightarrow \underline{y_1=0{,}05m}$

• Θ.Ι.(Μ+m): $\Sigma F=0 \Rightarrow F'_{ελ}-W_{ολ}=0 \Rightarrow k\cdot y_2=(M+m)g \Rightarrow \underline{y_2=0{,}10m}$

• ΑΔΕΤ: $E=K+U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}(M+m)u^2+\frac{1}{2}k(y_2-y_1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A=0{,}1m}$

• $\omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}} \Rightarrow \underline{\omega=10\,rad/s}$

• $y=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow[y=y_2-y_1]{t_0=0} 0{,}05=0{,}1\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=\frac{1}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\varphi_0=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ \varphi_0=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases} \xRightarrow{k=0} \begin{cases}\varphi_0=\frac{\pi}{6},\ u>0\\ \varphi_0=\frac{5\pi}{6},\ u<0\end{cases}$ Άρα $\underline{\varphi_0=\frac{\pi}{6}\,rad}$

$\boxed{y=0{,}1\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})}$ ① (S.I.)

B. ① $\xRightarrow{y=+A} 0{,}1=0{,}1\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})=1=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}10t+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ 10t+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases} \xRightarrow{k=0} 10t=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{t_1=\frac{\pi}{30}\,s}$

Γ. • $\frac{dp}{dt}=\Sigma F=-kx=-20\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6}) \xRightarrow{t=\frac{\pi}{12}s} \frac{dp}{dt}=-20\eta\mu(10\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \frac{dp}{dt}=-20\eta\mu\pi \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt}=0}$

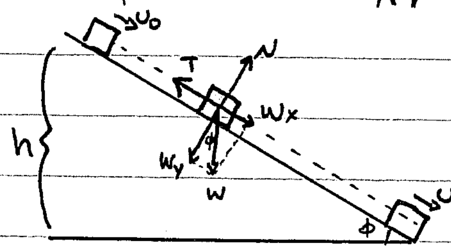
Δ. • $U_{max}=\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{U_{max}=1J}$

• $U^{ελ.}_{max}=\frac{1}{2}k(y_2+A)^2 \Rightarrow \boxed{U^{ελ.}_{max}=4J}$

1.8.

$M=9\,kg$
$k=160\,N/m$
$m=1\,kg$
$\upsilon_0=16\,m/s$
$\varphi=45^\circ$
$\mu=0{,}2$
$\upsilon=20\,m/s$

Α. • κίνηση m στο κεκλιμένο επίπεδο



• $W_x = W\eta\mu\varphi = 5\sqrt{2}\,N$

• $W_y = W\sigma\upsilon\nu\varphi = 5\sqrt{2}\,N$

• $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = W_y = 5\sqrt{2}\,N$

$T=\mu N \Rightarrow T=\sqrt{2}\,N$

• ΘΜΚΕ: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow$

$\Rightarrow W_{W_x} + W_T = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow$

$\Rightarrow W_x\cdot S - T\cdot S = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$

$\xRightarrow{S.I.} S(5\sqrt{2}-\sqrt{2}) = 200-128$

$\xRightarrow{\eta\mu\varphi=\frac{h}{S}\Rightarrow S=\frac{h}{\eta\mu\varphi}} \frac{h}{\eta\mu 45}\cdot 4\sqrt{2} = 72 \Rightarrow$

$\Rightarrow h=\frac{72}{8}\,m \Rightarrow \boxed{h=9\,m}$

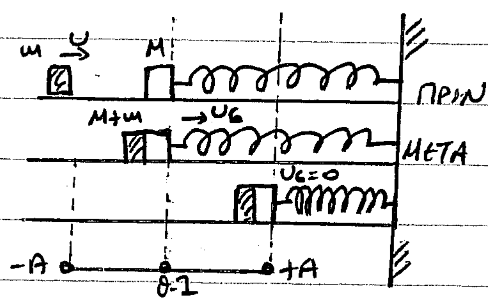
Β. • κίνηση του m στο οριζόντιο επίπεδο

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ($T_{\rho\iota\beta\eta}=0$) άρα $\upsilon=20\,m/s$ (σταθερή)

• κρούση ανελαστική (πλαστική)

$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda}$

$m\upsilon = (M+m)\upsilon_\sigma \Rightarrow \boxed{\upsilon_\sigma = 2\,m/s}$



Γ. • α.α.τ. του συσσωματώματος

Η κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας άρα

$\left.\begin{array}{l}\upsilon_\sigma = \upsilon_{max} = \omega A\\ \omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}} = 4\,rad/s\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A=0{,}5\,m}$

• $x = A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \xRightarrow[x=0]{t_0=0} 0 = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 0 = \eta\mu 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\varphi_0 = 2\kappa\pi+0\\ \varphi_0=2\kappa\pi+\pi-0\end{array}\right. \xRightarrow{\kappa=0}$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\varphi_0=0, & \upsilon>0\\ \varphi_0=\pi, & \upsilon<0\end{array}\right.$ Άρα $\underline{\varphi_0=0}$

• $\boxed{x=0{,}5\eta\mu 4t}$ (S.I.)

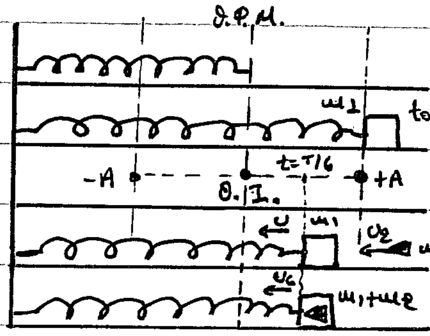
Δ. • Ο χρόνος που κάνει το συσσωμάτωμα να περάσει από τη θέση που έγινε η κρούση με την ίδια ταχύτητα είναι $\Delta t = T \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2}\,s.$

• Το σώμα m στο οριζόντιο επίπεδο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, άρα: $\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xRightarrow[\Delta t=T]{\Delta x=d} d = 20\pi\,m \Rightarrow \boxed{d=31{,}4\,m}$

1.9.

$m_1=3\,kg$
$k=400\,N/m$
$A=0,4\,m$
$t_0=0,\ x=+A$
$t=\frac{T}{6}$
$m_2=1\,kg$
$\upsilon_2=8\,m/s$



A. $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\xrightarrow[x=+A]{t_0=0}$

$A=A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=1=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\begin{cases}\varphi_0=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=0} \boxed{\varphi_0=\frac{\pi}{2}\,rad} \\ \varphi_0=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$

B. Σε ασκήσεις που η κρούση γίνεται με σώμα που εκτελεί ταλάντωση είναι σημαντικό να προσδιορίζουμε τη θέση και την ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος τη στιγμή της κρούσης

• $x=A\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{2}) \xrightarrow{t=\frac{T}{6}} x=A\eta\mu(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{6}+\frac{\pi}{2}) \Rightarrow x=A\eta\mu\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x=A\eta\mu(\pi-\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow x=A\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x=\frac{A}{2}=0,2\,m}$

• $\upsilon=\omega A\,\sigma\upsilon\nu(\omega t+\frac{\pi}{2}) \xrightarrow{t=\frac{T}{6}} \upsilon=\omega A\,\sigma\upsilon\nu(\pi-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \upsilon=-\omega A\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \upsilon=-\omega A\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m_1}}=\frac{20}{\sqrt{3}}\,rad/s\end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon=-\frac{20}{\sqrt{3}}\cdot 0,4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \underline{\upsilon=-4\,m/s}$

Γ. $T=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} \Rightarrow \boxed{T=0,2\pi\,s}$

Δ. • κρούση ανελαστική (πλαστική)

Α.Δ.Ορμής: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi}=\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$

$m_1\upsilon+m_2\upsilon_2=(m_1+m_2)V_\sigma \Rightarrow \boxed{V_\sigma=5\,m/s}$

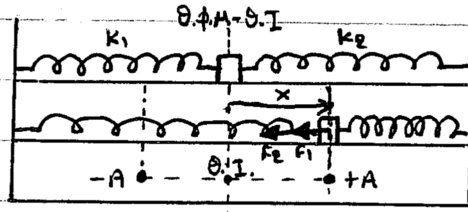
• α.α.τ. του συσσωματώματος

ΑΔΕΤ: $E=K+U \Rightarrow E=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_\sigma^2+\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{E=58\,J}$

1.10

$m_1=2\,kg$
$k_1=50\,N/m$
$k_2=150\,N/m$

A.



1)• Επειδή η θέση ισορροπίας του m_1 συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους των ελατηρίων δεν έχουμε δυνάμεις στον οριζόντιο άξονα.

• θέση με απομάκρυνση x: $\Sigma F=-F_1-F_2 \Rightarrow \Sigma F=-k_1x-k_2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\Sigma F=-(k_1+k_2)\cdot x}$

Άρα το σώμα m_1 όταν αφεθεί ελεύθερο θα εκτελέσει α.α.τ. με $D=k_1+k_2=200\ N/m$.

2) • Η αρχική απομάκρυνση $x=5cm$ από τη θέση ισορροπίας θα είναι και το πλάτος ταλάντωσης του m_1 όταν το αφήσαμε ($u_0=0$) ελεύθερο. Άρα $A=x=5cm \Rightarrow \boxed{A=0,05m}$

• $T=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D}} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{2}{200}}\ s \Rightarrow \boxed{T=0,2\pi\ s}$

• $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow[x=A]{t_0=0} A=A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=1=\eta\mu\frac{\pi}{2}$ ή $\underline{\varphi_0=\frac{\pi}{2}\ rad}$

• $\omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \underline{\omega=10\ rad/s}$

• $\boxed{x=0,05\eta\mu(10t+\frac{\pi}{2})}$ (S.I.)

• $u=u_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow{u_{max}=\omega A} \boxed{u=0,5\sigma\upsilon\nu(10t+\frac{\pi}{2})}$ (S.I.)

B. 1) • Κίνηση m_2
ελεύθερη πτώση, με χρόνο κίνησης ίσο με το χρόνο που κάνει το m_1 να πάει από τη θέση $x=-A$ στη θέση ισορροπίας $x=0$ για πρώτη φορά, δηλαδή $t=\frac{T}{4} \Rightarrow$ $t=0,05\ s$.

• $y=\frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{y=h} \boxed{h=0,125m}$

2) • Η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας.
Α.Δ.Ορμής (άξονας $x'x$) : $p_x^{\alpha\rho\chi}=p_x^{\tau\varepsilon\lambda}$

$m_1\cdot u_{max}=(m_1+m_2)\cdot u'_{max} \Rightarrow \boxed{u'_{max}=0,2\ m/s}$

• $E'=\frac{1}{2}(m_1+m_2)u'^2_{max} \Rightarrow \boxed{E'=0,1\ J}$

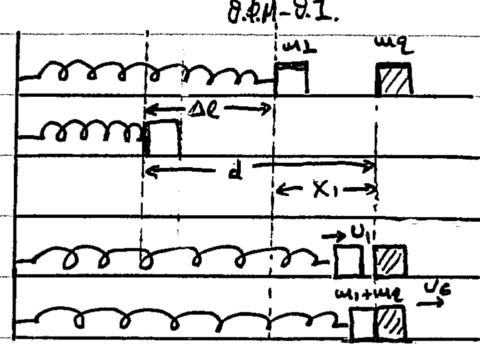
1.11. $m_1 = 1\ kg$

$m_2 = 3\ kg$

$k = 100\ N/m$

$\Delta\ell = 0,2\ m$

$t_1 = \frac{\pi}{15}\ s$



A. α.α.τ. του m_1

• $A = \Delta\ell = 0,2\ m$

• $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\ rad/s$

• $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[x=-A]{t_0=0}$

$-A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2}$

Άρα $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\ rad$

• $x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2}) \xrightarrow{t_1 = \frac{\pi}{15} s} x_1 = 0,2\eta\mu(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu\frac{13\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu(2\pi + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \underline{x_1 = 0,1\ m}$

Άρα $d = \Delta\ell + x_1 \Rightarrow \boxed{d = 0,3\ m}$

B. $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{\upsilon_{max} = \omega A} \upsilon = 2\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{3\pi}{2}) \xrightarrow{t_1} \boxed{\upsilon_1 = \sqrt{3}\ m/s}$

Γ. • κρούση ανελαστική (πλαστική)

Α.Δ. Ορμής: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$

$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_\sigma \Rightarrow \underline{\upsilon_\sigma = 0,25\sqrt{3}\ m/s}$

• $\Pi\% = \frac{K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\sigma^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} \cdot 100\%$

$\Rightarrow \Pi\% = \frac{3 - \frac{3}{4}}{3} \cdot 100\% \Rightarrow \boxed{\Pi\% = 75\%}$

Δ. ΑΔΕΤ: $E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_\sigma^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow \boxed{E = 0,875\ J}$

1.12. $x = 0,1\eta\mu 10t$ (S.I.)

$E = 6\ J$

$t = \frac{\pi}{10}\ s$

$m_2 = \frac{m_1}{2}$

$A' = 0,1\sqrt{6}\ m$

A. $\begin{cases} x = 0,1\eta\mu 10t \\ x = A\eta\mu\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,1\ m \\ \omega = 10\ rad/s \end{cases}$

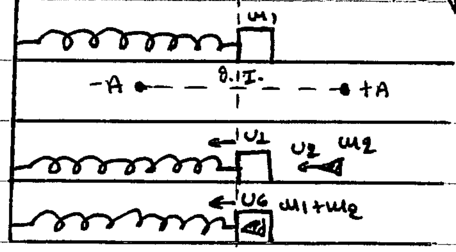
• $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{k = 1200\ N/m}$

• $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m_1} \Rightarrow \boxed{m_1 = 12\ kg}$

Β. $E' = \frac{1}{2}kA'^2 \Rightarrow \boxed{E' = 36\,J}$

Γ. $u'_{max} = \omega' A' \Rightarrow u'_{max} = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\cdot A' \Rightarrow \boxed{u'_{max} = 2\,m/s}$

Δ.



• Θα προσδιορίσουμε τη θέση και την ταχύτητα του m_1 τη στιγμή $t=\frac{\pi}{10}\,s$.

■ $x=0{,}1\eta\mu 10t \Rightarrow x=0{,}1\eta\mu\pi \Rightarrow \underline{x=0}$

■ $\upsilon=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \upsilon=\sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow \underline{\upsilon=-1\,m/s}$

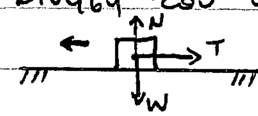
Α.Δ. Ορμής: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$

$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)\upsilon_\sigma \xrightarrow[m_2=m_1/2]{\upsilon_\sigma=u'_{max}} \boxed{\upsilon_2 = 4\,m/s}$

1.13

$M=9\,kg$
$k=160\,N/m$
$m=1\,kg$
$\upsilon=12\,m/s$
$d=23\,m$
$22m$, $\mu=0{,}1$

Α. • Κίνηση του m (για τα πρώτα 22m με τριβή)



Θ.Μ.Κ.Ε.: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow$

$\Rightarrow -T\cdot x = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow$

$\xrightarrow[T=\mu N=\mu mg=1N]{\Sigma F_y=0 \Rightarrow N=W=mg} \underline{\upsilon_1 = 10\,m/s}$

• Η κίνηση του m το τελευταίο 1m είναι ευθύγραμμη ομαλή αφού δεν έχουμε τριβές

• κρούση ανελαστική (πλαστική)

Α.Δ.Ορμής: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$

$m\upsilon_1 = (M+m)\upsilon_\sigma \Rightarrow \boxed{\upsilon_\sigma = 1\,m/s}$

Β. • Η κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας, άρα:

$\left.\begin{array}{l}\upsilon_\sigma = \upsilon_{max} = \omega A \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = 4\,rad/s\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A=0{,}25\,m}$

• Επειδή $A=0{,}25m < 1m$ άρα το συσσωμάτωμα θα ταλαντωθεί στο ίδιο δάπεδο εκτελώντας α.α.τ.

• $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \xrightarrow[x=0]{t_0=0} 0=A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0=0=\eta\mu 0 \Rightarrow \begin{cases}\varphi_0=2k\pi+0 \\ \varphi_0=2k\pi+\pi-0\end{cases} \xrightarrow{k=0}$

$\Rightarrow \begin{cases}\varphi_0=0, & \upsilon>0 \\ \varphi_0=\pi, & \upsilon<0\end{cases}$ Άρα $\underline{\varphi_0=\pi\,rad}$

$\boxed{x = 0{,}25\,\eta\mu(4t+\pi)}$ (S.I.)

Γ. Το συσσωμάτωμα θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία για δεύτερη φορά όταν πάει στη θέση $x=+A$, δηλαδή σε χρόνο

$$\left.\begin{array}{l}\Delta t = \frac{3T}{4}\\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}\,s\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{3\pi}{8}\,s}$$

Δ. $\left\{\begin{array}{l}x = 0{,}25\,\eta\mu(4t+\pi)\\ x' = 0{,}16\,\eta\mu 4t\end{array}\right. \Rightarrow x_{ολ} = x + x' \Rightarrow x_{ολ} = A\eta\mu(\omega t+\theta)$ (1)

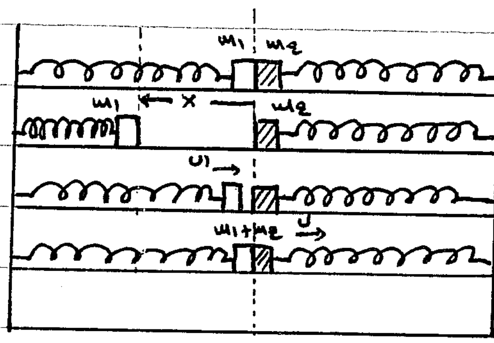
- $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\phi} \Rightarrow A = 0{,}09\,m$
- $\varepsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\Delta\phi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\phi} = 0$, $\theta = \pi$ rad.

Άρα (1) $\Rightarrow$ $\underline{x = 0{,}09\,\eta\mu(4t+\pi)}$ (S.I.)

- $\upsilon = \upsilon_{max}\,\sigma\upsilon\nu(\omega t+\theta) \xRightarrow{\upsilon_{max}=\omega A} \boxed{\upsilon = 0{,}36\,\sigma\upsilon\nu(4t+\pi)}$ (S.I.)

1.14

m_1, $m_2 = 3{,}5\,kg$
$k = 50\,N/m$
$x = 20\,cm$
$\Delta t = 0{,}05\pi\,s$



Α. Το σώμα m_1 αφήνεται ($\upsilon_0=0$) από ακραία θέση ταλάντωσης ($A = x = 0{,}2\,m$) και θα συγκρουστεί στη θέση ισορροπίας του σε χρόνο $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 0{,}2\pi\,s$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \xRightarrow{S.I.} 0{,}04\pi^2 = 4\pi^2\frac{m_1}{50} \Rightarrow \boxed{m_1 = 0{,}5\,kg}$$

Β. • Το m_1 θα φτάσει στη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα

$$\left.\begin{array}{l}\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega A\\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 10\,rad/s\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\upsilon_1 = 2\,m/s}$$

- κρούση ανελαστική (πλαστική)

Α.Δ. Ορμής: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

$$m_1\upsilon_1 = (m_1+m_2)\upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon = 0{,}25\,m/s}$$

Γ. • Δες άσκηση 1.10, ερώτημα Α1

Το σύστημα θα εκτελέσει α.α.τ. με $D=k+k=2k \Rightarrow \underline{D=100\,N/m}$

• Η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας και το συσσωμάτωμα θα σταματήσει για πρώτη φορά όταν φτάσει σε ακραία θέση, δηλαδή σε χρόνο $\Delta t = \frac{T'}{4}$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta t = \frac{T'}{4} \\ T' = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{D}} = 0{,}4\pi\,s\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 0{,}1\pi\,s}$$

Δ. • Αφού η κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας, ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l}\upsilon=\upsilon_{max}=\omega' A' \\ \omega' = \frac{2\pi}{T'} = 5\,rad/s\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A'=0{,}05\,m}$$

• $x = A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \xRightarrow[x=0,\,\upsilon>0]{t_0=0} \underline{\phi_0=0}$

Άρα $\boxed{x=0{,}05\eta\mu 5t}$ (S.I.)

E. $$\left.\begin{array}{l}x=0{,}05\eta\mu 5t \\ x'=0{,}05\eta\mu(5t+\frac{\pi}{3})\end{array}\right\} \Rightarrow x_{ολ}=x+x' \Rightarrow x_{ολ}=A\eta\mu(\omega t+\theta) \quad (1)$$

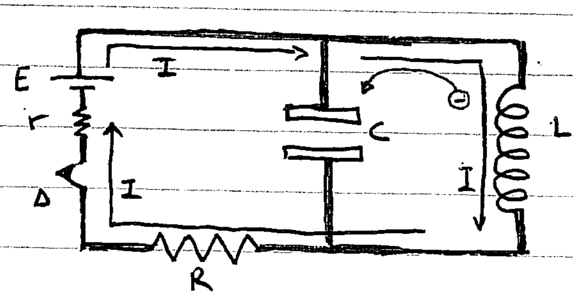
• $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\phi} \Rightarrow \underline{A=0{,}05\sqrt{3}\,m}$

• $\varepsilon\phi\theta = \frac{A_2\eta\mu\Delta\phi}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\phi} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\underline{\theta=\frac{\pi}{6}\,rad}$

• $\Sigma F = -Dx \xRightarrow{(1)} F_{επ} = -D\cdot A\eta\mu(\omega t+\theta) \Rightarrow \boxed{F_{επ} = -5\sqrt{3}\,\eta\mu(5t+\frac{\pi}{6})}$ (S.I.)

1.15

$E=40V$
$r=5\Omega$
$R=15\Omega$
$C=1\mu F$
$L=10mH$



Α. • Διακόπτης Δ κλειστός

• $I=\frac{E}{R_{ολ}}=\frac{E}{R+r} \Rightarrow \boxed{I=2A}$

• $V_C=V_L=I\cdot R_L \xRightarrow{R_L=0} V_C=0$

$Q=C\cdot V_C \Rightarrow \boxed{Q=0}$

Β. • Διακόπτης Δ ανοιχτός ($t_0=0$): ηλεκτρική ταλάντωση στο LC

1) Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται αντίθετα από τη συμβατική φορά του ρεύματος που σχεδιάσαμε και διαρρέει το πηνίο. Άρα θετικό φορτίο θα αποκτήσει ο κάτω οπλισμός.

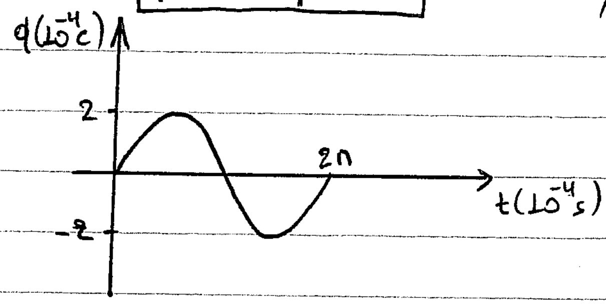
2) $t_0=0$, $q=0$, $i=I=2A$: $q=Q\eta\mu\omega t$ (1)

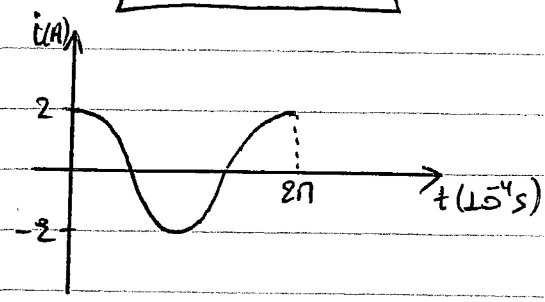
$i=I\sigma\upsilon\nu\omega t$ (2)

$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \underline{\omega=10^4 rad/s}$

$I=\omega Q \Rightarrow Q=\frac{I}{\omega} \Rightarrow Q=\frac{2}{10^4}C \Rightarrow \underline{Q=2\cdot10^{-4}C}$

(1) $\Rightarrow \boxed{q=2\cdot10^{-4}\eta\mu 10^4 t}$ (S.I.) , (2) $\Rightarrow \boxed{i=2\sigma\upsilon\nu\omega t}$ (S.I.)





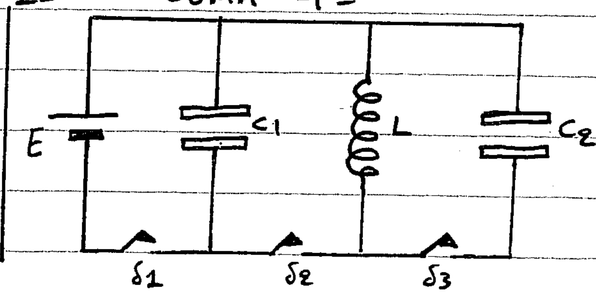
3) Από τη σχέση $C=\frac{q}{V} \Rightarrow V=\frac{q}{C}$, αντιλαμβανόμαστε ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή μηδενίζεται όταν μηδενιστεί το φορτίο του, δηλαδή σε χρόνο $\Delta t=\frac{T}{2}$

$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\cdot10^{-4}s$ $\Rightarrow \boxed{\Delta t=\pi\cdot10^{-4}s}$

4) ΑΔΕΤ: $E=U_E+U_B \Rightarrow \frac{1}{2} \quad = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow q^2=LC(I^2-i^2)$

$\Rightarrow q^2=10^{-8}\sqrt{4-3} \Rightarrow \boxed{q=10^{-4}C}$ φορτίο του πυκνωτή ονομάζουμε το φορτίο του θετικού οπλισμού του

1.16 $C_1=50\mu F$, $C_2=200\mu F$, $L=2H$, $E=80V$, $r=0$



• δ1 κλειστός, δ2,δ3 ανοιχτοί: φορτίζεται ο πυκνωτής
C_1: $C_1=\frac{Q_1}{E} \Rightarrow Q_1=C_1E$
$\Rightarrow \underline{Q_1=4\cdot10^{-3}C}$

A. • δ2 κλειστός, δ1,δ3 ανοιχτοί ($t_0=0$): ηλεκτρική ταλάντωση στο LC_1

$t_0=0$, $q=Q_1$, $i=0$: $q=Q_1\sigma\upsilon\nu\omega_1 t$

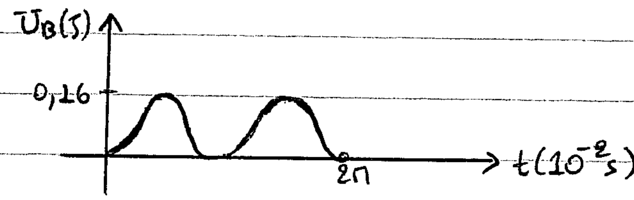
$i=-I\eta\mu\omega_1 t$

1) $E_1=\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} \Rightarrow E_1=\frac{1}{2}\frac{16\cdot10^{-6}}{5\cdot10^{-5}}J \Rightarrow \boxed{E_1=0,16\,J}$

2) • $T_1=2\pi\sqrt{LC_1} \Rightarrow \underline{T_1=2\pi\cdot10^{-2}s}$

• $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow \underline{\omega_1=100\ rad/s}$

• $U_B=\frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow U_B=\frac{1}{2}LI^2\eta\mu^2\omega_1 t \Rightarrow \underline{U_B=0,16\cdot\eta\mu^2 100t}$ (S.I.)



B. • δ3 κλειστός, δ1,δ2 ανοιχτοί ($t_1=5\pi\cdot10^{-3}s$): ηλεκτρική ταλάντωση στο LC_2 με ενέργεια E_2 ίση με την ενέργεια που έχει τη στιγμή t_1 το πηνίο.

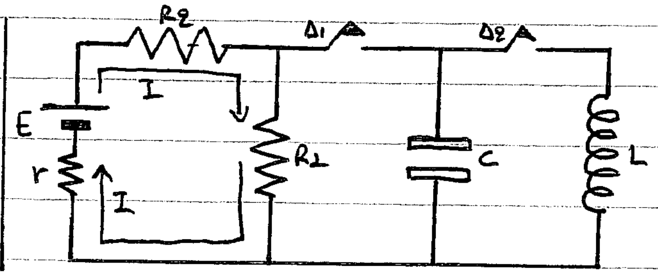
1) $E_2=U_B=0,16\eta\mu^2 100t \xrightarrow{t_1} E_2=0,16\eta\mu^2\frac{\pi}{2} \Rightarrow E_2=0,16J$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2}=0,16J \Rightarrow \boxed{Q_2=8\cdot10^{-3}C}$

2) $E_2=U_B=0,16\eta\mu^2 100t \xrightarrow{t_2} E_2=0,16\eta\mu^2\frac{\pi}{6} \Rightarrow E_2=0,04J$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2}=0,04J \Rightarrow \boxed{Q_2=4\cdot10^{-3}C}$

1.17 $E=60V$, $r=1\Omega$, $R_1=9\Omega$, $R_2=20\Omega$, $C=2\mu F$, $L=20mH$



A. • Δ1 κλειστός, Δ2 ανοιχτός

$I=\frac{E}{R_{ολ}}=\frac{E}{R_1+R_2+r}$

$\Rightarrow \boxed{I=2A}$

• Φόρτιση του πυκνωτή σε τάση $V_1 = IR_1 = 18V$.

$C = \frac{Q}{V_1} \Rightarrow Q = CV_1 \Rightarrow \boxed{Q = 36\cdot10^{-6}C}$

Β. • Δ1 ανοιχτός, Δ2 κλειστός ($t_0=0$): ηλεκτρική ταλάντωση στο LC

$t_0=0$, $q=Q=36\cdot10^{-6}C$, $i=0$: $q = Q\,συν\omega t$ ①

$i = -I\,ημ\omega t$ ②

• $T=2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow \boxed{T=4\pi\cdot10^{-4}s}$

• $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \underline{\omega = 5000\ rad/s}$

• $I=\omega Q \Rightarrow \boxed{I=0,18\ A}$

Γ. ① $\Rightarrow \boxed{q=36\cdot10^{-6}\,συν5000t}$ (S.I.)

② $\Rightarrow \boxed{i=-0,18\,ημ5000t}$ (S.I.)

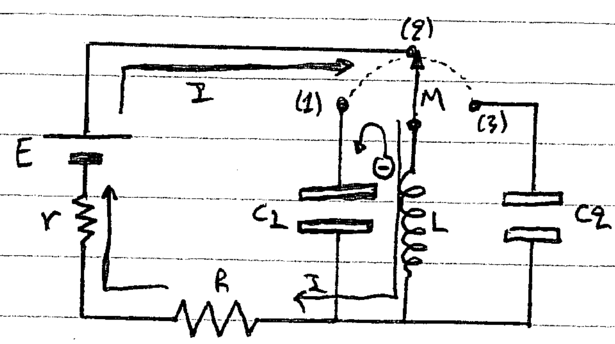
Δ. Α.Δ.Ε.Τ.: $E = U_E + U_B \xrightarrow{U_E=3U_B} E=4U_B \Rightarrow \frac{1}{2} LI^2 = 4\cdot\frac{1}{2} Li^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow i=\pm\frac{I}{2} \xrightarrow{1η\ φορά} i=-\frac{I}{2}=-0,09A$

② $\xrightarrow{i=-\frac{I}{2}} -\frac{I}{2} = -I\,ημ\omega t \Rightarrow ημ\omega t=\frac{1}{2}=ημ\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \omega t=2κ\pi+\frac{\pi}{6} \\ \omega t=2κ\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases} \xrightarrow{κ=0}$

$\Rightarrow \begin{cases}\omega t=\frac{\pi}{6} \\ \omega t=\frac{5\pi}{6}\end{cases} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{5000\cdot6} \Rightarrow t_1=\frac{\pi}{3\cdot10^4}s \Rightarrow \boxed{t_1=\frac{\pi}{3}10^{-4}s}$

1.18 $E=40V$, $r=5\Omega$
$R=15\Omega$
$C_1=1\mu F$
$C_2=4\mu F$
$L=10mH$



Α. • Ο μεταγωγός Μ στη θέση (2)

• $I=\frac{E}{R_{ολ}}=\frac{E}{R+r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{I=2A}$

Β. • Ο μεταγωγός Μ στη θέση (1), ($t_0=0$): ηλεκτρική ταλάντωση στο LC_1

$t_0=0$, $q=0$, $i=I=2A$: $q=Q\,ημ\omega t$ ①

$i=I\,συν\omega t$ ②

• Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται αντίθετα από τη συμβατική φορά του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο. Άρα θετικό φορτίο θα αποκτήσει πρώτος ο κάτω οπλισμός του πυκνωτή C_1.

Γ. • $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC_1}} \Rightarrow \underline{\omega = 10^4\ rad/s}$

• $I = \omega Q \Rightarrow Q = \dfrac{I}{\omega} \Rightarrow \underline{Q = 2 \cdot 10^{-4}\, C}$

• ① $\Rightarrow \boxed{q = 2 \cdot 10^{-4}\, ημ\, 10^4 t}$ (S.I.)

② $\Rightarrow \boxed{i = 2 \cdot συν\, 10^4 t}$ (S.I.)

Δ. • Ο μεταγωγός δ1 στη θέση (3), ($t_1 = \pi \cdot 10^{-4} s$): ηλεκτρική ταλάντωση στο LC_2.

• Η ενέργεια E_2 με την οποία θα ταλαντωθεί το κύκλωμα LC_2 είναι ίση με την ενέργεια του πηνίου τη στιγμή t_1:

$E_2 = U_{B(t_1)} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} L I^2 συν^2 \omega t \xRightarrow{t_1} E_2 = \frac{1}{2} 10^{-2} \cdot 4 \cdot συν^2 10^4 \cdot \pi \cdot 10^{-4}$

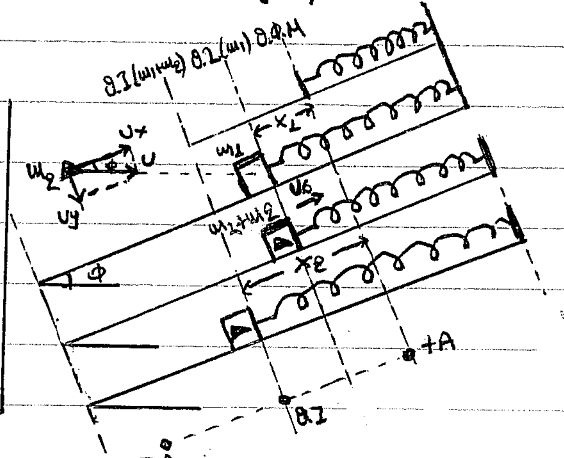
$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow E_2 = 2 \cdot 10^{-2} J \\ &E_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{Q_2 = 4 \cdot 10^{-4}\, C}$$

Ε. Αφού τη στιγμή t_1 ο πυκνωτής C_2 είναι αφόρτιστος, το φορτίο του θα μηδενιστεί σε χρόνο $t' = \frac{T_2}{2}$, όπως και η τάση του

$T_2 = 2\pi\sqrt{LC_2} \Rightarrow T_2 = 4\pi \cdot 10^{-4} s$

Άρα η χρονική στιγμή είναι: $t_2 = t_1 + \frac{T_2}{2} \Rightarrow \boxed{t_2 = 3\pi \cdot 10^{-4} s}$

1.19
- $m_1 = 2\, kg$
- $\varphi = 30^{o}$
- $k = 100\, N/m$
- $m_2 = 2\, kg$
- $u = 2\, m/s$



Α: Κρούση ανελαστική (πλαστική)

Α.Δ.Ορμής (στον άξονα $x'x$)

$P^{x'x}_{αρχ} = P^{x'x}_{τελ} \Rightarrow m_2 u_x = (m_1 + m_2) V_κ$

$\Rightarrow m_2 \cdot u \cdot συν\varphi = (m_1 + m_2) V_κ$

$\Rightarrow \underline{V_κ = \frac{\sqrt{3}}{2}\, m/s}$

• Θ.Ι.(m_1): $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W_{1x} = 0 \Rightarrow k \cdot x_1 = m_1 g \eta\mu\varphi \Rightarrow \underline{x_1 = 0{,}1m}$

- Θ.Ι.(m_1+m_2): $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F'_{ελ} - W_x = 0 \Rightarrow k \cdot x_2 = (m_1+m_2) g \eta\mu\varphi \Rightarrow \underline{x_2 = 0{,}2m}$

• ΑΔΕΤ: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)u_6^2 + \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A = 0{,}2m}$

Β. • $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \underline{\omega = 5\,rad/s}$

• $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[x = x_2 - x_1]{t_0 = 0} 0{,}1 = 0{,}2\,\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \xRightarrow{k=0} \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}, u>0 \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6}, u<0 \end{cases}$ Άρα $\underline{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,rad}$

$\boxed{x = 0{,}2\,\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)}$ (S.I.)

Γ. Η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενίζεται για πρώτη φορά στη θέση $x = +A$, άρα:

$x = 0{,}2\,\eta\mu(5t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow 0{,}2 = 0{,}2\,\eta\mu(5t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(5t + \frac{\pi}{6}) = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 5t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 5t + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \xRightarrow{k=0} 5t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{15}\,s}$

Δ. $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -k(x_2 - x_1)$ ή $\boxed{\frac{dp}{dt} = -10\,kg\,m/s^2}$

1.20 | $m = 1kg$
$E_{προσφ} = 50J$
$a_{max} = 100\,m/s^2$
$t_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5\sqrt{3}\,m$, επιταχ.

Α. • $E = E_{προσφ} \Rightarrow E = 50J \xRightarrow{S.I.} \frac{1}{2}kA^2 = 50 \Rightarrow kA^2 = 100$ (1)

• $a_{max} = 100\,m/s^2 \xRightarrow{S.I.} \omega^2 A = 100 \Rightarrow \frac{k}{m}A = 100 \Rightarrow kA = 100$ (2)

• $\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \underline{A = 1m}$

• (2) $\Rightarrow \underline{k = 100\,N/m}$

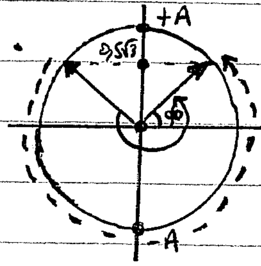
• $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \underline{\omega = 10\,rad/s}$

• $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[x = 0{,}5\sqrt{3}]{t_0 = 0} \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\xRightarrow{k=0} \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{3}, u>0 \\ \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}, u<0 \end{cases}$ Άρα $\underline{\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}\,rad}$ (αφού περνά από τη θέση $x = 0{,}5\sqrt{3}m$ επιταχυνόμενο άρα κινείται προς τη Θ.Ι. με $u<0$)

• $\boxed{x = \eta\mu\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right)}$ (S.I.)

B.



• $\eta\mu\phi = \frac{0{,}5\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{3}$ rad

• $\Delta\phi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi \Rightarrow \Delta\phi = \frac{5\pi}{3}$ rad

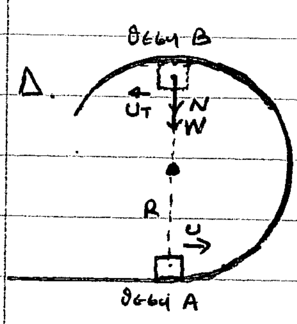
• $\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{6}$ s $\xRightarrow[\Delta t = t_1 - t_0]{t_0=0} \boxed{t_1 = \frac{\pi}{6}\ s}$

• ΘΜΚΕ: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_{\Sigma F} = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}m\upsilon_\tau^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_\alpha^2 \Rightarrow$
$\xRightarrow{|\upsilon_\tau| = |\upsilon_\alpha|} \boxed{W_{\Sigma F} = 0}$

Γ. • $\upsilon = \upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \xRightarrow[\upsilon_{max}=\omega A]{t_1 = \frac{\pi}{6}s} \upsilon = 10\,\sigma\upsilon\nu(10\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \upsilon = 10\,\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \upsilon = 10\,\sigma\upsilon\nu(2\pi + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \upsilon = 10\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \underline{\upsilon = 5\ m/s}$

• $p = m\upsilon \Rightarrow \boxed{p = 5\ kg\,m/s}$

Δ.



• Οριακή ανακύκλωση (θέση Β):

$F_K = m\frac{\upsilon_T^2}{R} \xRightarrow{F_K = \Sigma F} N + W = m\frac{\upsilon_T^2}{R} \Rightarrow N = -mg + m\frac{\upsilon_T^2}{R} \Rightarrow$
$\xRightarrow{N \geq 0} m(-g + \frac{\upsilon_T^2}{R}) \geq 0 \Rightarrow -g + \frac{\upsilon_T^2}{R} \geq 0 \Rightarrow \upsilon_T^2 \geq gR$ (3)

• Κίνηση m (από θέση Α στη θέση Β):

ΑΔΜΕ: $E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi}^{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$
$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_T^2 + mg2R \Rightarrow \upsilon_T^2 = \upsilon^2 - 4gR$ (4)

• (3) $\xRightarrow{(4)} \upsilon^2 - 4gR \geq gR \Rightarrow \upsilon^2 \geq 5gR \Rightarrow R \leq \frac{\upsilon^2}{5g} \Rightarrow \underline{R \leq 0{,}5\,m}$

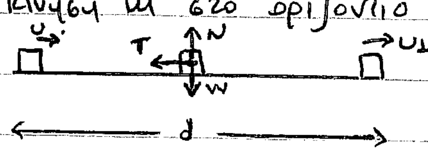
Άρα $\boxed{R_{max} = 0{,}5\,m}$

1.21. $m = 1\,kg$, $R = 1\,m$, $Q = 2\,J$, $\mu = 0{,}1$, $d = 3{,}5\,m$, $M = 2\,kg$, $k = 300\,N/m$

A: Κίνηση m στο τεταρτοκύκλιο:

Α.Δ. Ενέργειας: $E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow mgR = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + Q \Rightarrow$
$\xRightarrow{S.I.} 10 = \frac{\upsilon^2}{2} + 2 \Rightarrow \boxed{\upsilon = 4\,m/s}$

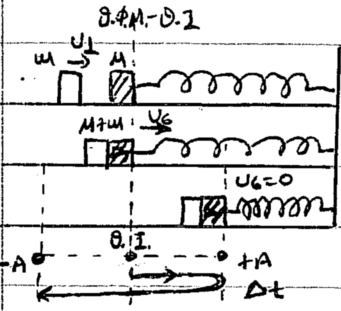
B. • Κίνηση m στο οριζόντιο επίπεδο



• $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - W = 0 \Rightarrow N = mg = 10N$

$T = \mu N \Rightarrow T = 1\,N$

• ΘΜΚΕ: $\Sigma W_F = \Delta K \Rightarrow W_T = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow -T\cdot d = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \underline{\upsilon_1 = 3\,m/s}$



• Κρούση ανελαστική (πλαστική)

Α.Δ. ορμής: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

$mυ_1 = (M+m)υ_σ \Rightarrow \boxed{υ_σ = 1\,m/s}$

Γ. $Δt = \frac{3T}{4} \xrightarrow{T=2π\sqrt{\frac{M+m}{k}}} \boxed{Δt = 0{,}15π\,s}$

Δ. • α.α.τ. του M+m

• $ω = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \Rightarrow \underline{ω = 10\,rad/s}$

• Η κρούση έγινε στη Θ.Ι. άρα:

$υ_σ = υ_{max} = ωA \Rightarrow \underline{A = 0{,}1\,m}$

• $t_0 = 0$, $x = 0$, $υ > 0$ άρα $\underline{φ_0 = 0}$

$\boxed{x = 0{,}1\,ημ10t}$ (S.I.)

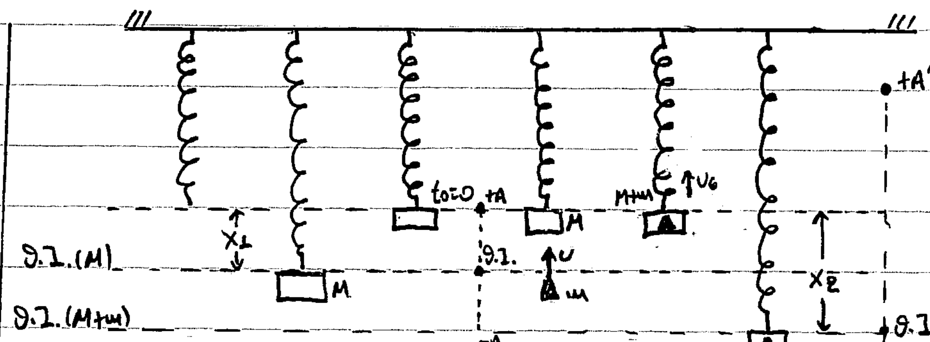
Ε. $\begin{cases} x = 0{,}1\,ημ10t \\ x' = 0{,}1\,ημ8t \end{cases} \Rightarrow x_{ολ} = x + x' \Rightarrow x = 2Aσυν\frac{ω_1-ω_2}{2}t\;ημ\frac{ω_1+ω_2}{2}t \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x = 0{,}2συνt \cdot ημ9t}$ (S.I.)

$υ = υ_{max}\,συν\frac{ω_1+ω_2}{2}t \xrightarrow{υ_{max}=ωA'} \boxed{υ = 1{,}8συνt \cdot συν9t}$ (S.I.)

1.92.

$M = 1\,kg$
$k = 100\,N/m$
$m = 1\,kg$
$υ = 8\,m/s$
$t = 0{,}2π\,s$



A. Δες θεωρία

• Θ.Ι.(M): $ΣF = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W = 0 \Rightarrow k \cdot x_1 = mg \Rightarrow \underline{x_1 = 0{,}1\,m\ (=A)}$

• $ω = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow \underline{ω = 10\,rad/s}$

• $x = Aημ(ωt+φ_0) \xrightarrow[x=+A]{t_0=0} A = Aημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = 1 = ημ\frac{π}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} φ_0 = 2κπ + \frac{π}{2} \xrightarrow{κ=0} \underline{φ_0 = \frac{π}{2}\,rad} \\ φ_0 = 2κπ + π - \frac{π}{2} \end{cases}$

• $\boxed{x = 0{,}1\,ημ\left(10t + \frac{π}{2}\right)}$ ① (S.I.)

B. ① $\xrightarrow{t=0{,}2πs} x = 0{,}1ημ\left(2π + \frac{π}{2}\right) \Rightarrow x = 0{,}1ημ\frac{π}{2} \Rightarrow \underline{x = 0{,}1\,m}$

• $υ = υ_{max}\,συν(ωt+φ_0) \xrightarrow{υ_{max}=ωA} υ = συν\left(10t+\frac{π}{2}\right) \xrightarrow{t=0{,}2πs} \underline{υ = 0}$

· κρούση ανελαστική (πλαστική)

Α.Δ.Ορμής: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

$m υ = (M+m) υ_6 \Rightarrow \boxed{υ_6 = 4 m/s}$

Γ. · Θ.Ι. $(M+m)$: $\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{ελ} - W_{ολ} = 0 \Rightarrow k \cdot x_2 = (M+m) g \Rightarrow \underline{x_2 = 0,2 m}$

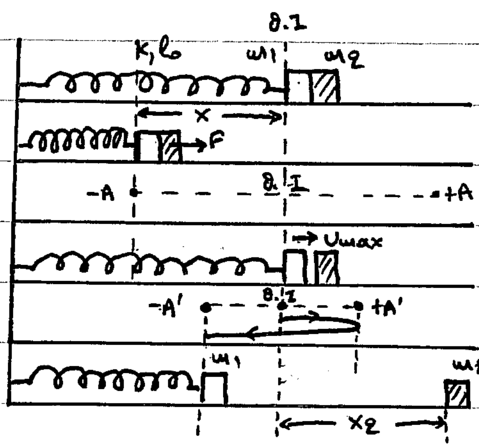
· Α.Δ.Ε.Τ.: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2}(M+m) υ_6^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A' = 0,6 m}$

Δ. $\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot υ = -k \cdot x_2 υ_6$ ή $\boxed{\frac{dK}{dt} = -80 J/s}$

1.93.

$m_1 = 2 kg$
$m_2 = 6 kg$
$k = 200 N/m$
$x = 40 cm$



Α. · $W_{F_{εξ}} = E = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{W_{F_{εξ}} = 16 J}$

Β. · α.α.τ. (m_2)

$\Sigma F = -D_{m_2} \cdot x \Rightarrow F = -m_2 ω^2 \cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow F = -m_2 \cdot \frac{k}{m_1 + m_2} \cdot x \Rightarrow \boxed{F = -150 x}$ (S.I.)

Γ. · $F = -150 \cdot x \xrightarrow{F=0} \boxed{x=0}$, άρα το m_2 θα αποχωριστεί από το m_1 τη στιγμή που διέρχονται από τη θέση ισορροπίας

· $t = \frac{T}{4}$

$T = 2π\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 0,4π s$

$\Rightarrow \boxed{t = 0,1π s}$

Δ. · Τη στιγμή που τα δύο σώματα αποχωρίζονται (στη Θ.Ι.) έχουν ταχύτητα $υ_{max} = ω A$

$ω = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = 5 rad/s$

$\xrightarrow{A = x = 0,4 m} \underline{υ_{max} = 2 m/s}$

· α.α.τ. (m_1), μετά τον διαχωρισμό:

▪ $υ'_{max} = υ_{max} = ω' A'$

$ω' = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 rad/s$

$\Rightarrow \underline{A' = 0,2 m}$

▪ ο χρόνος μέχρι τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι:

$Δt = \frac{3T'}{4} \xrightarrow{T' = 2π\sqrt{\frac{m_1}{k}}} \underline{Δt = 0,15π s}$

• Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση m_2 (μετά το διαχωρισμό):

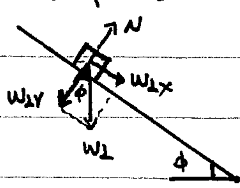
$$υ = \frac{Δx}{Δt} \Rightarrow x_2 = υΔt \xRightarrow{υ=υ_{max}} x_2 = 0,3π\, m \Rightarrow \underline{x_2 = 0,942\, m}$$

Άρα η απόσταση ανάμεσα στα δύο σώματα είναι:

$$d = A' + x_2 \Rightarrow \boxed{d = 1,142\, m}$$

1.24. $m_2 = 4kg$, $φ = 30°$, $k = 100\, N/m$, $m_1 = 1kg$, $S = 0,15m$, $υ_1 = \frac{\sqrt{15}}{2}\, m/s$

Α. • Κίνηση m_1 στο κεκλιμένο επίπεδο (πριν την κρούση):



ΘΜΚΕ: $ΣW_F = ΔK \Rightarrow W_{w_{1x}} = K_{τελ} - K_{αρχ}$

$$\Rightarrow w_{1x} \cdot S = \frac{1}{2} m_1 υ_1^2 - \frac{1}{2} m_1 υ_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 g ημφ \cdot S = \frac{1}{2} m_1 υ_1^2 - \frac{1}{2} m_1 υ_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{υ_0 = 1,5\, m/s}$$

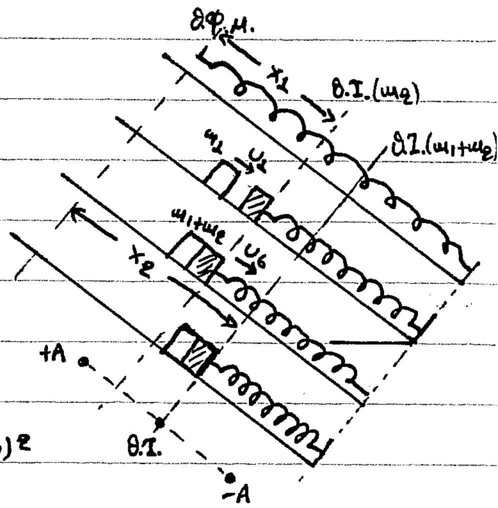
Β. • κρούση ανελαστική (πλαστική)

ΑΔ.Ορμής: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

$$m_1 υ_1 = (m_1 + m_2) υ_σ \Rightarrow \underline{υ_σ = 0,1\sqrt{15}\, m/s}$$

• $$Π\% = \frac{E_{απωλειών}}{K_{αρχ}} \cdot 100\% = \frac{K_{αρχ} - K_{τελ}}{K_{αρχ}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 υ_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_σ^2}{\frac{1}{2} m_1 υ_1^2} \cdot 100\%$$

$$\Rightarrow \boxed{Π\% = 80\%}$$



Γ. • α.α.τ. του συσσωματώματος

• Θ.Ι.(m_2): $ΣF_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W_{2x} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k \cdot x_1 = m_2 g ημφ \Rightarrow \underline{x_1 = 0,2 m}$$

• Θ.Ι.(m_1+m_2): $ΣF_x = 0 \Rightarrow F'_{ελ} - W_x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k \cdot x_2 = (m_1+m_2) g ημφ \Rightarrow \underline{x_2 = 0,25 m}$$

• ΑΔΕΤ: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)υ_σ^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$

$$\Rightarrow \underline{A = 0,1 m}$$

• $ω = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \Rightarrow \underline{ω = 2\sqrt{5}\, rad/s}$

• $x = A ημ(ωt + φ_0) \xrightarrow[x = x_2 - x_1]{t=0} 0,05 = 0,1 ημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = \frac{1}{2} = ημ\frac{π}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} φ_0 = 2kπ + \frac{π}{6} \\ φ_0 = 2kπ + π - \frac{π}{6} \end{cases} \xrightarrow{k=0} \begin{cases} φ_0 = \frac{π}{6}, \; υ > 0 \\ φ_0 = \frac{5π}{6}, \; υ < 0 \end{cases}$$

Άρα $\underline{φ_0 = \frac{5π}{6}\, rad}$

• $\boxed{x = 0,1 ημ(2\sqrt{5}\, t + \frac{5π}{6})}$ (S.I.)

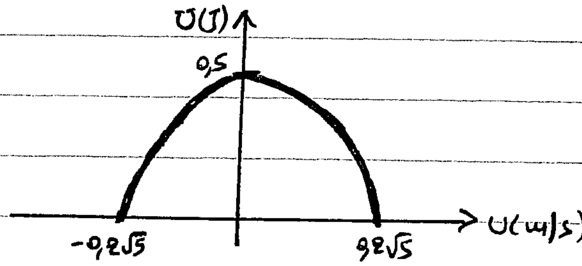
Δ. • $E=K+U \Rightarrow U=E-K \Rightarrow U=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)υ^2 \Rightarrow U=0{,}5-2{,}5υ^2$ (1) (S.I.)

• $υ_{max}=ωA=0{,}2\sqrt{5}$ m/s

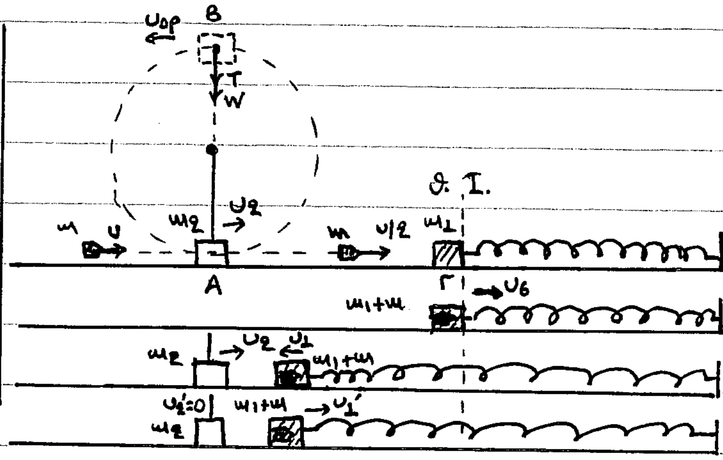
(1) $\xrightarrow{υ=υ_{max}}$ $U=0$

(1) $\xrightarrow{υ=0}$ $U=0{,}5$ J

(1) $\xrightarrow{υ=-υ_{max}}$ $U=0$



1.25. $m_2=0{,}4$ kg, $L=0{,}5$ m, $k=80$ N/m, $m_1=0{,}1$ kg, $m=0{,}1$ kg, $υ$, $\frac{υ}{2}$



Α. • Οριακή ανακύκλωση (θέση Β):

$F_κ = m_2\frac{υ^2}{L} \xrightarrow{F_κ=ΣF}$

$T+W=m_2\frac{υ^2}{L} \xrightarrow{T=0}$

$\Rightarrow υ_{ορ}=\sqrt{gL} \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_{ορ}=\sqrt{5}$ m/s

• Α.Δ.Μ.Ενέργειας (Α→Β) - κίνηση m_2

$E_{μηχ}^{αρχ}=E_{μηχ}^{τελ} \Rightarrow K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2υ_2^2=\frac{1}{2}m_2υ_{ορ}^2+m_2g2L \Rightarrow$

$\Rightarrow υ_2=5$ m/s

• Κρούση ανελαστική $m-m_2$

Α.Δ.Ορμής: $\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ}$

$mυ=m\frac{υ}{2}+m_2υ_2 \Rightarrow m\frac{υ}{2}=m_2υ_2 \Rightarrow \boxed{υ=40\text{ m/s}}$

Β. • κρούση ανελαστική (πλαστική) $m-m_1$

Α.Δ. Ορμής: $\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ}$

$m\frac{υ}{2}=(m_1+m)υ_σ \Rightarrow \boxed{υ_σ=10\text{ m/s}}$

• α.α.τ $(m+m_1)$

$$\left.\begin{aligned} &υ_σ=υ_{max}=ωA \\ &ω=\sqrt{\frac{k}{m_1+m}} \Rightarrow ω=20\text{ rad/s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A=0{,}5\text{ m}}$$

Γ.1) • Α.Δ.Ε.Τ: $E=K+U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}(m+m_1)υ_1^2+\frac{1}{2}k(AΓ)^2 \Rightarrow υ_1=-5\frac{m}{s}$

• κατά την περιστροφή του σώματος m_2 το έργο της τάσης του νήματος είναι μηδενικό (αφού είναι συνεχώς κάθετη στη μετατόπιση, ενώ αντίστοιχα και το έργο του βάρους είναι μηδέν (ως συντηρητική δύναμη σε κλειστή διαδρομή). Άρα το m_2 θα ξαναπεράσει από τη θέση Α με την ίδια ταχύτητα $υ_2 = 5\,m/s$.

• Κρούση m_2 και $m+m_1$

Α.Δ.Ορμής: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ}$

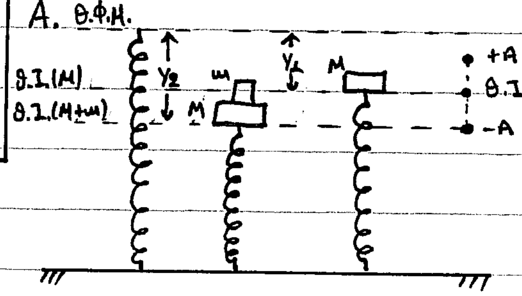
$$m_2 υ_2 - (m+m_1) υ_1 = (m+m_1) υ_1' \Rightarrow \boxed{υ_1' = 5\,m/s}$$

2) • α.α.τ. $(m+m_1)$ μετά την κρούση με το m_2

$$Α.Δ.Ε.Τ: E' = K + U \Rightarrow E' = \frac{1}{2}(m+m_1)υ_1'^2 + \frac{1}{2}k(ΑΓ)^2 \Rightarrow \boxed{E' = 10\,J}$$

1.26. $k = 100\,N/m$, $M = 1{,}5\,kg$, $m = 0{,}5\,kg$

A. Θ.Φ.Μ.



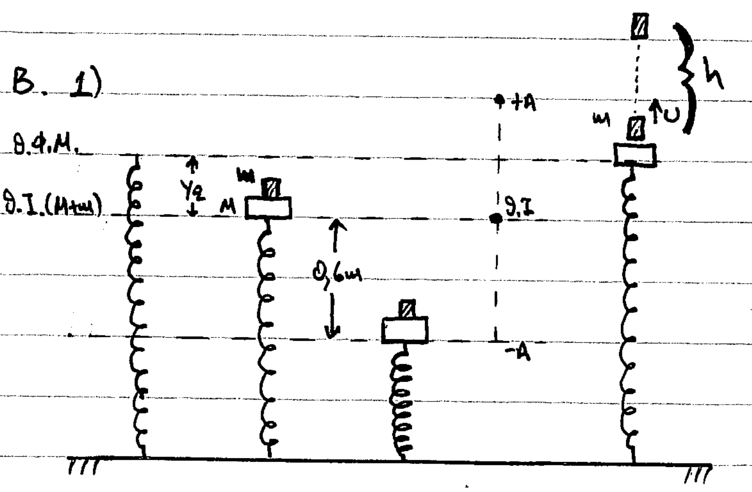
• Θ.Ι.(Μ): $ΣF = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W_M = 0 \Rightarrow k y_1 = Mg \Rightarrow \underline{y_1 = 0{,}15\,m}$

• Θ.Ι.(Μ+m): $ΣF = 0 \Rightarrow F'_{ελ} - W_{ολ} = 0 \Rightarrow k \cdot y_2 = (M+m)g \Rightarrow \underline{y_2 = 0{,}20\,m}$

• α.α.Τ.(M)

$$ΑΔΕΤ: E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2}k(y_2 - y_1)^2 \Rightarrow \boxed{E = 0{,}125\,J}$$

B. 1)



• α.α.Τ. (M+m)

• $A = y = 0{,}6\,m$

• $ω = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \Rightarrow \underline{ω = 5\sqrt{2}\,rad/s}$

• $y = Aημ(ωt + φ_0) \xrightarrow[y=-A]{t_0=0} -A = Aημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = -1 = ημ\frac{3π}{2} \Rightarrow \underline{φ_0 = \frac{3π}{2}\,rad}$

Άρα $\boxed{y = 0{,}6ημ\left(5\sqrt{2}\,t + \frac{3π}{2}\right)}$ (S.I.)

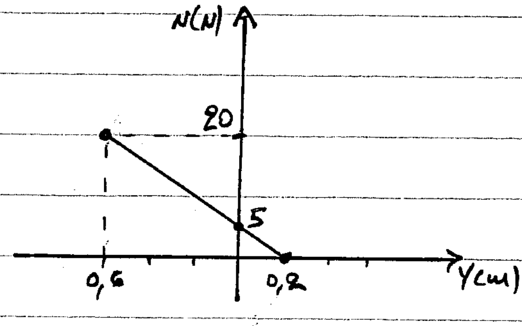
2) • α.α.Τ. (m)

$$ΣF = -D_m \cdot y \Rightarrow N - W_m = -mω^2 \cdot y \Rightarrow N = mg - mω^2 y \Rightarrow \underline{N = 5 - 25y \ ①} \ (S.I.)$$

Απώλεια επαφής: $N = 0 \xrightarrow{①} \boxed{y = 0{,}2\,m \ (= y_2)}$

Άρα απώλεια επαφής έχουμε όταν το σύστημα περνά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

3)



① $\xrightarrow{y=-0,6m}$ $N=20N$

① $\xrightarrow{y=0}$ $N=5N$

① $\xrightarrow{y=0,2m}$ $N=0$

4) • Η ταχύτητα με την οποία το σώμα m αποχωρίζεται από το M είναι:

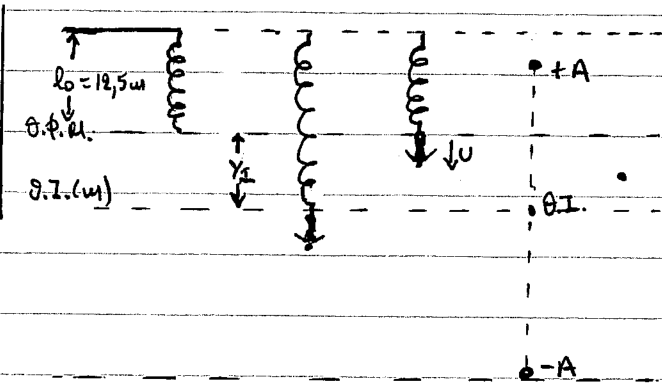
Α.Δ.Ε.Τ: $E=K+U \Rightarrow \frac{1}{2} D_m A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D_m y^2 \xrightarrow[\omega=\sqrt{\frac{k}{M+m}}]{D_m=m\omega^2} \underline{v=4\,m/s}$

• κίνηση m, μετά την αποχώρησή του από το M.

ΑΔΜΕ: $E_{μηχ}^{αρχ} = E_{μηχ}^{τελ} \Rightarrow K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mgh \Rightarrow h=\frac{v^2}{2g} \Rightarrow \boxed{h=0,8m}$

1.27 $m=80kg$, $d=62,5m$, $l_0=12,5m$



A. • Ελεύθερη πτώση

$y=\frac{1}{2} g t^2 \xrightarrow{y=l_0} t=\sqrt{2,5}\,s$

$v=gt \Rightarrow \underline{v=10\sqrt{2,5}\,m/s}$

• θ.Ι.(m): $\Sigma F=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{ελ}-W=0 \Rightarrow k\cdot y_1=mg$

$\xRightarrow{S.I.} y_1=\frac{800}{k}$ ①

• α.α.τ. του m

ΑΔΕΤ: $E=K+U \Rightarrow \frac{1}{2} kA^2=\frac{1}{2} m v^2+\frac{1}{2} k\cdot y_1^2 \xrightarrow{l_0+y_1+A=62,5m \Rightarrow A=50-y_1 \text{ ②}}$

$\xRightarrow[①]{S.I.} k\cdot\left(50-\frac{800}{k}\right)^2 = 80\cdot 250 + k\cdot\left(\frac{800}{k}\right)^2 \Rightarrow \boxed{k=40\,N/m}$

B. • ① $\Rightarrow \underline{y_1=20m}$

• ② $\Rightarrow \boxed{A=30m}$

Γ. Όταν ο άνθρωπος απέχει 40m από την επιφάνεια της θάλασσας έχει απομάκρυνση $y = 40m - A \Rightarrow \underline{y = 10m}$

· ΑΔΕΤ: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \omega^2(A^2 - y^2)$

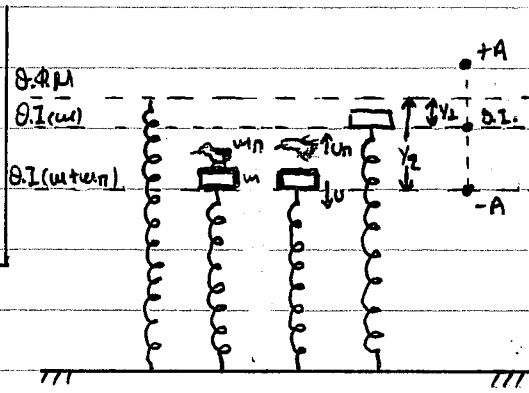
$\Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2} \xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,rad/s} \upsilon = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{900-100}$

$\Rightarrow \underline{\upsilon = \pm 20\ m/s}$

· $|p| = m|\upsilon| \Rightarrow \boxed{|p| = 1600\ kg\,m/s}$

Δ. $\frac{F_{\varepsilon\pi(max)}}{F_{\varepsilon\lambda(max)}} = \frac{k\cdot A}{k\cdot(y_1+A)} = \frac{A}{y_1+A}$ ή $\boxed{\frac{F_{\varepsilon\pi(max)}}{F_{\varepsilon\lambda(max)}} = 0{,}6}$

1.88 $m = 1kg$, $k = 100\ N/m$, $m_\pi = 1kg$, $\upsilon_\pi = 1\ m/s$



A. · Α.Δ.Ορμής: $\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda}$

$0 = m_\pi\upsilon_\pi - m\upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon = 1\ m/s}$

B. · Θ.Ι.(m): $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - W = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k\cdot y_1 = mg \Rightarrow \underline{y_1 = 0{,}1m}$

· Θ.Ι.(m+mπ): $\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = W_{o\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow k\cdot y_2 = (m+m_\pi)g \Rightarrow \underline{y_2 = 0{,}2m}$

· $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{\omega = 10\ rad/s}$

· Α.Δ.Ε-Ταλάντωσης: $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}k(y_2 - y_1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A = 0{,}1\sqrt{2}\ m}$

Γ. · $E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \boxed{E = 1\ J}$

Δ. · $y = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow[y=y_1-y_2]{t_0=0} -0{,}1 = 0{,}1\sqrt{2}\,\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=1} \varphi_0 = \frac{7\pi}{4},\ \upsilon > 0 \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=0} \varphi_0 = \frac{5\pi}{4},\ \upsilon < 0 \end{cases}$ Άρα $\underline{\varphi_0 = \frac{5\pi}{4}\ rad}$

· $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2\,\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) \xrightarrow{E=K_{max}} \boxed{K = \sigma\upsilon\nu^2\left(10t + \frac{5\pi}{4}\right)}$ (S.I.)

1.29 $\boxed{m=0,1\ kg}$ A. Πληροφορίες από γραφική παράσταση $x=f(t)$:

• 1η Ταλάντωση: ▪ $\underline{A_1=2cm=0,02m}$

▪ $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{10}s \Rightarrow T=0,2\pi s$, $\omega=\frac{2\pi}{T} \Rightarrow \underline{\omega=10\ rad/s}$

▪ $t_0=0$, $x=0$, $\upsilon>0 \rightarrow \underline{\phi_{0(1)}=0}$

Άρα $\boxed{x_1=2\eta\mu(10t)}$ (x_1 σε cm)

• 2η Ταλάντωση: ▪ $\underline{A_2=2cm=0,02m}$

▪ $x_2=A_2\eta\mu(\omega t+\phi_{0(2)}) \xrightarrow[x=\sqrt{3}cm]{t_0=0} \sqrt{3}=2\eta\mu\phi_{0(2)} \Rightarrow \eta\mu\phi_{0(2)}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases}\phi_0=2k\pi+\frac{\pi}{3}\\ \phi_0=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases} \xrightarrow{k=0} \begin{cases}\phi_0=\frac{\pi}{3}, \upsilon>0\\ \phi_0=\frac{2\pi}{3}, \upsilon<0\end{cases}$ Άρα $\underline{\phi_0=\frac{\pi}{3}\ rad}$

▪ $x_2=2\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{3}) \xrightarrow[x=2]{t=\pi/60\ s} 2=2\eta\mu(\frac{\omega\pi}{60}+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta\mu(\frac{\omega\pi}{60}+\frac{\pi}{3})=1=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases}\omega\frac{\pi}{60}+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \omega\frac{\pi}{60}+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases} \xrightarrow{k=0}$

$\Rightarrow \omega\frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega\frac{\pi}{60}=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \underline{\omega=10\ rad/s}$

Άρα $\boxed{x_2=2\eta\mu(10t+\frac{\pi}{3})}$ (x_2 σε cm)

B. $x=x_1+x_2 \Rightarrow x=A\eta\mu(\omega t+\theta)$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\phi} \Rightarrow \underline{A=2\sqrt{3}\ cm}$

$\varepsilon\phi\theta=\frac{A_2\eta\mu\Delta\phi}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\phi}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\theta=\frac{\pi}{6}\ rad$

Άρα $\boxed{x=2\sqrt{3}\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6})}$ (x σε cm)

Γ. $\frac{dp}{dt}=\Sigma F=-Dx \xrightarrow{D=m\omega^2=10N/m} \frac{dp}{dt}=-10\cdot 2\sqrt{3}\cdot 10^{-2}\eta\mu(10t+\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{t_1}$

$\Rightarrow \frac{dp}{dt}=-0,2\sqrt{3}\eta\mu(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dt}=-0,3\ kg\,m/s^2}$

Δ. • $\upsilon=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0) \xrightarrow{\upsilon_{max}=\omega A=0,2\sqrt{3}\ m/s} \upsilon=0,2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(10t+\frac{\pi}{6}) \xrightarrow{t_1}$

$\Rightarrow \upsilon_1=0,1\sqrt{3}\ m/s$

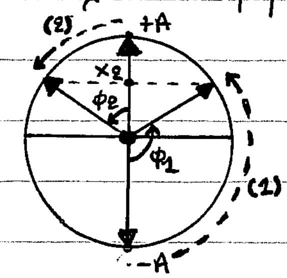
• $E=K+U \Rightarrow K=E-U \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_2^2=\frac{1}{2}DA^2-U \Rightarrow |\upsilon_2|=0,1\sqrt{3}\ m/s$

· $\Delta|p| = |p_{τελ}| - |p_{αρχ}| \Rightarrow \Delta|p| = m|υ_2| - m|υ_1| \Rightarrow \boxed{\Delta|p|=0}$

1.30

$m_1=m_2=0,1\,kg$
$k_1=40\,N/m$
$k_2=10\,N/m$
$x=20cm$

A. Κύκλος αναφοράς της ταλάντωσης



$\phi_1+\phi_2=\pi \Rightarrow \frac{\phi_1}{t}+\frac{\phi_2}{t}=\frac{\pi}{t} \Rightarrow$

$\xRightarrow{\omega=\frac{\phi}{t}\Rightarrow\phi=\omega t} \omega_1+\omega_2=\frac{\pi}{t} \xRightarrow[\omega_2=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}=10\,rad/s]{\omega_1=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=20\,rad/s}$

$\Rightarrow \boxed{t_1=\frac{\pi}{30}s}$

B. · $\omega_2=\frac{\phi_2}{t} \xRightarrow{t_1} \underline{\phi_2=\frac{\pi}{3}\,rad}$

· $συν\phi_2=\frac{x_2}{A} \xRightarrow{A=x=0,2m} \boxed{x_2=0,1m}$

Γ. • 1η Ταλάντωση:

▪ $A=x=0,2m$

▪ $x_1=A\,ημ(\omega t+\phi_0) \xRightarrow[x=-A]{t_0=0} -A=A\,ημ\phi_0 \Rightarrow ημ\phi_0=-1=ημ\frac{3\pi}{2}$ ή $\underline{\phi_0=\frac{3\pi}{2}\,rad}$

Άρα $x_1=0,2\,ημ(20t+\frac{3\pi}{2})$, (S.I.)

$υ_1=4\,συν(20t+\frac{3\pi}{2}) \xRightarrow{t_1=\frac{\pi}{30}s} υ_1=4\,συν(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}) \Rightarrow υ_1=4\,συν(2\pi+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{υ_1=2\sqrt{3}\,m/s}$

• 2η Ταλάντωση:

▪ $A=x=0,2m$

▪ $x_2=A\,ημ(\omega t+\phi_0) \xRightarrow[x=A]{t_0=0} A=A\,ημ\phi_0 \Rightarrow ημ\phi_0=1=ημ\frac{\pi}{2}$ ή $\underline{\phi_0=\frac{\pi}{2}\,rad}$

Άρα $x_2=0,2\,ημ(10t+\frac{\pi}{2})$, (S.I.)

$υ_2=2\,συν(10t+\frac{\pi}{2}) \xRightarrow{t_1=\frac{\pi}{30}s} υ_2=2\,συν(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}) \Rightarrow υ_2=2\,συν(\pi-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{υ_2=-\sqrt{3}\,m/s}$

• Κρούση ανελαστική (πλαστική)

Α.Δ.Ορμής: $\vec{p}_{αρχ}=\vec{p}_{τελ}$

$m_1υ_1-m_2υ_2=(m_1+m_2)V \Rightarrow \underline{V=\frac{\sqrt{3}}{2}\,m/s}$

• $E_{απωλ.}=K_{αρχ}-K_{τελ} \Rightarrow E_{απωλ.}=\frac{1}{2}m_1υ_1^2+\frac{1}{2}m_2υ_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{E_{απωλ.}=0,675\,J}$

Δ. Α.Δ.Ε.Τ. : $E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x_2^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E = 0{,}325\ J}.$$